

Fourierov red i Fourierova transformacija

Domagoj Matijević i Stjepan Poljak*

Sažetak

U ovom radu objasniti ćemo ako svaku periodičku funkciju možemo napisati kao sumu (ne nužno konačnu) sinusa različitih amplituda, faza i frekvencija – Fourierov red. U drugom dijelu rada motivirati ćemo formulu za Fourierovu transformaciju preko Fourierova reda te objasniti formulu za diskretnu Fourierovu transformaciju.

1 Uvod

U današnjoj se literaturi Fourierova transformacija najčešće prezentira čitatelju kao cjelovit samostalan izraz te se rijetko motivira čitatelja da shvati kako je sam izraz nastao (vidi [1], [3], [2]). U ovom ćemo članku pokušati objasniti pojam Fourierova reda te preko njega motivirati nastanak formule za Fourierovu transformaciju, slijedeći na taj način i sam povijesni tijek njihovih nastanaka.

Fourierova analiza proizlazi iz glavne ideje da svaku periodičku funkciju možemo zapisati kao sumu (ne nužno konačnu) sinusa različitih amplituda, faza i frekvencija. Takva suma naziva se Fourierov red (vidi npr. [6]).

Sama motivacija koju je Jean Baptiste Joseph Fourier (Slika 1) postavio je problem rješavanja parcijalne diferencijalne jednadžbe za širenja topline. Fourier je teorije o širenju topline i Fourierovu redu razvio u razdoblju od 1804. do 1807. godine te poslije objavio u svom bitnom radu *O širenju topline u čvrstim tijelima* objavljenom 1822. godine. Taj rad naišao je na određen otpor, ponajviše matematičara (među njima su bili i Lagrange i Laplace); razlog tomu je Fourierova tvrdnja da se sve (pa i nederivabilne) funkcije mogu razviti u trigonometrijski red. Iako derivabilnost neće biti nužan

*Ovaj rad je rezultat uvodne diskusije diplomskog rada “Brza Fourierova transformacija i primjene” studenta S. Poljaka napisanog pod mentorstvom D. Matijevića.



Slika 1: Joseph Fourier (1768.-1830.)

uvjet za zapisivanje funkcije kao sume sinusa, poslije će se ipak pokazati da je Fourierova tvrdnja ipak bila preambiciozna. Danas su Fourierove teorije dalje razvijene; među njima je najvažnija diskretna Fourierova transformacija (DFT) i algoritam za brzo i efikasno izračunavanje DFT-a u $O(n \log n)$ vremenu - brza Fourierova transformacija (FFT), koja je temelj velikog dijela modernih multimedijских primjena (MP3, JPEG).

Iako je Fourierova transformacija proizašla kao rezultat proučavanja Fourierova reda, u današnjoj literaturi često se servira kao „gotov alat” i vrlo je teško shvatiti iz same formule Fourierove transformacije motivaciju za njeno nastajanje.

Struktura ovog rada sastoji se od dvaju osnovnih poglavlja. U 2. poglavlju formalno ćemo definirati Fourierov red, dok ćemo u 3. poglavlju motivirati Fourierovu transformaciju preko Fourierova reda te objasniti formulu za diskretnu Fourierovu transformaciju.

2 Fourierov red

Pri razvoju funkcije u Fourierov red, uvjet je da je funkcija periodična. Prvo pitanje koje se postavlja - možemo li to napraviti i za neperiodične funkcije na nekom intervalu? Odgovor je: da, ako ih učinimo periodičnima! Tada taj interval postaje period te funkcije i ponavlja se beskonačno mnogo puta. Iako sva razmatranja koja ćemo ovdje iznijeti vrijede za periodične funkcije nekog općenitog perioda $[-L/2, L/2]$, u ostatku teksta ćemo zbog jednostavnosti pretpostaviti da je promatrana funkcija periodična na nekom intervalu $[-\pi, \pi]$. Dakle, za danu funkciju (ili signal, ako je funkcija ovisna o vremenu)

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periodičnu na $[-\pi, \pi]$, želimo pronaći brojeve $a_0, a_k, \phi_k \in \mathbb{R}$, za $k = 1, \dots, n$ tako da vrijedi

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \sin(kx + \phi_k), \quad n \geq 0.$$

U ovom izrazu a_k ima ulogu amplitude, a ϕ_k ulogu faze za sinus funkciju frekvencije k . Član $\frac{a_0}{2}$ je poseban i on služi za translaciju funkcije duž y -osi (često se naziva "DC komponenta"). Ako u gornjem izrazu primijenimo adicijsku formulu za sinus funkciju,

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

vidimo da možemo zapisati Fourierov red i drugačije:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \sin(kx) \cos \phi_k + a_k \cos(kx) \sin \phi_k).$$

Primijetimo da u ovoj formuli $\sin \phi_k$ i $\cos \phi_k$ ne ovise ni o varijabli x ni o k - to su brojevi koji su dio koeficijenata uz $\sin(kx)$ i uz $\cos(kx)$. Stoga, možemo definirati nove koeficijente $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ u kojima će implicitno biti uključeni i ϕ_k . Tako da nova formula izgleda ovako:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx)), \quad n \geq 0. \quad (1)$$

Traženje Fourierova reda sada se svodi na traženje koeficijenata a_k i b_k . Primijetite da više eksplicitno ne moramo promatrati fazu pojedine sinus funkcije, već je dovoljno tražiti koeficijente (amplitude) uz sinus i kosinus.

2.1 Uvjeti na funkciju $f(x)$

Vrijedi li jednakost (1) za svaku periodičku funkciju i je li uistinu istina da baš svaku periodičku funkciju $f(x)$ možemo zapisati kao konačnu sumu sinusa i kosinusa različitih amplituda i frekvencija? Da bismo bolje razumjeli odgovor na ovako postavljeno pitanje, prisjetimo se elementarnih tvrdnji iz diferencijalnog računa kao što je tvrdnja da *zbroj svakih dviju neprekidnih funkcija*

mora opet biti neprekidna funkcija, ili da je zbroj dvije derivabilne funkcije opet derivabilna funkcija, ili još jače tvrdnje da zbroj svakih dviju m -puta derivabilnih funkcija, $m \in \mathbb{N}$, mora opet biti m -puta derivabilna funkcija. I sinus i kosinus su i neprekidne i m -puta derivabilne funkcije pa vrijedi i da je svaka njihova konačna suma takva. Iako je dovoljno uzeti uvjet derivabilnosti, htjeli smo posebno naglasiti i slabije svojstvo neprekidnosti. Uzevši u obzir ove činjenice, čini se da je nemoguće razviti nederivabilnu funkciju u ovako definiran Fourierov red!

No, stvar prima drugačiju perspektivu kada iskoristimo činjenicu da veće frekvencije sinusa i kosinusa u sumi (1) uzrokuju oštrije rubove u rezultatnoj krivulji. Primjer toga prikazan je na slici 2 za tzv. *rectangle* funkciju koja je ovdje definirana na sljedeći način:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1, 1), \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Stoga, kada bismo dodavali sve više i više funkcija, brojač k bio bi sve veći i veći i naša rezultatna krivulja sve bi bolje aproksimirala vrhove u kojima funkcija nije derivabilna. Ovaj argument iskoristiti ćemo za motivaciju da sumu (1) preoblikujemo tako da ide u beskonačnost, na sljedeći način:

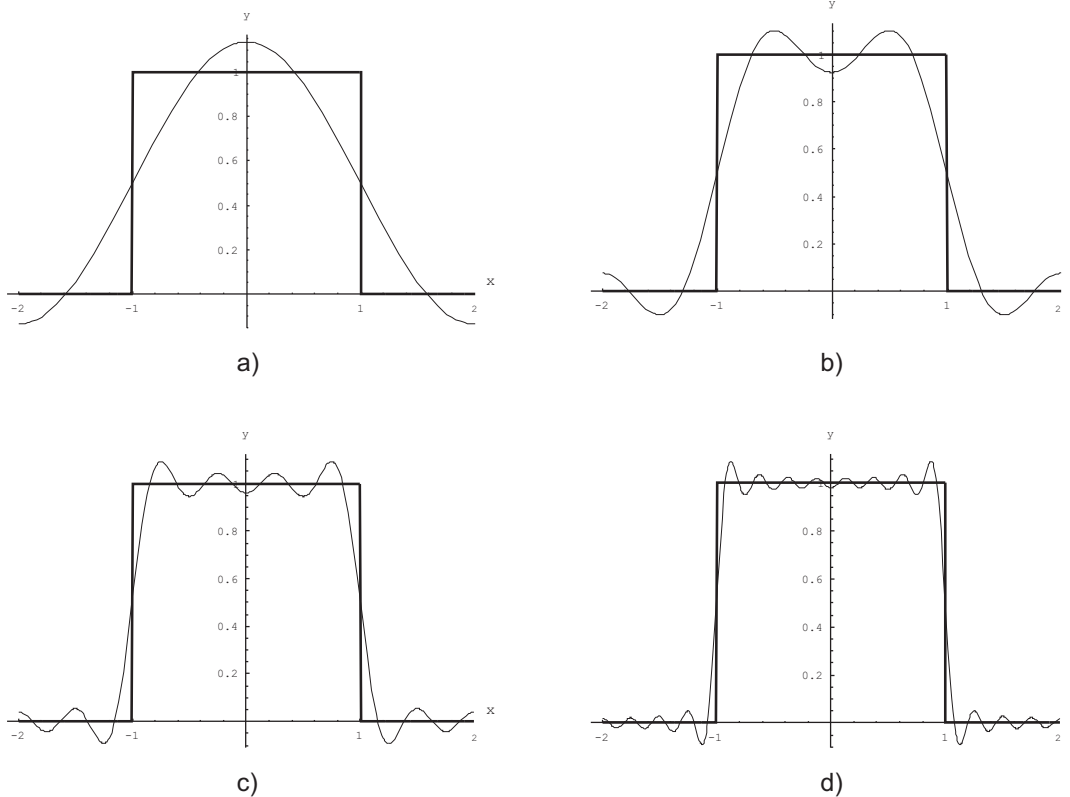
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx)). \quad (2)$$

I ova se suma može bolje zapisati, prisjetimo li se Eulerove formule

$$re^{i\phi} = r(\cos \phi + i \sin \phi).$$

Formulu (2) možemo zapisati na nov način tako da uvedemo nove koeficijente $c_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$. No, želimo biti sigurni da ćemo na kraju dobiti realne koeficijente. Stoga ćemo iskoristiti svojstvo da je $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$, gdje je $z \in \mathbb{C}$, a \bar{z} oznaka za konjugirano kompleksni broj. Primijetimo da je s pomoću Eulerove formule, da bismo dobili konjugirano kompleksni broj, dovoljno za ϕ uzeti $-\phi$ (svojstvo neparnosti funkcije sinus). Imajući to na umu, želimo pronaći koeficijente c_k takve da vrijedi

$$c_k e^{ikx} + \overline{c_k e^{ikx}} = a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx),$$



Slika 2: Na slici je prikazana aproksimacija tzv. *rectangle* funkcije na intervalu $[-2, 2]$ s pomoću Fourierova reda za: a) $n=2$; b) $n=4$; c) $n=8$; d) $n=16$.

što je ekvivalentno

$$(\cos(kx) - i \sin(kx))\bar{c}_k + (\cos(kx) + i \sin(kx))c_k = a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx).$$

Nadalje, vrijedi

$$\cos(kx)(\bar{c}_k + c_k) + \sin(kx)(c_k i - \bar{c}_k i) = a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx).$$

Primijetimo da je $c_k i - \bar{c}_k i = -2\text{Im}(c_k)$. Sada iz gornjeg izraza dobivamo sljedeće dvije jednačbe:

$$\begin{aligned} a_k &= -2\operatorname{Im}(c_k), \\ b_k &= 2\operatorname{Re}(c_k). \end{aligned}$$

Ako prvu jednadžbu pomnožimo s imaginarnom jedinicom i , tj. $a_k i = -2\operatorname{Im}(c_k)i$ te joj pribrojimo drugu jednadžbu, dobivamo

$$\begin{aligned} b_k + a_k i &= 2\operatorname{Re}(c_k) - 2\operatorname{Im}(c_k)i, \\ \bar{c}_k &= \frac{1}{2}(b_k + ia_k). \end{aligned}$$

Primijetite da smo se gore koristili jednakošću $\operatorname{Re}(c_k) - \operatorname{Im}(c_k)i = \bar{c}_k$. Nadalje, sada je lako dobiti samu vrijednost c_k .

Ako uvedemo oznaku $c_{-k} = \bar{c}_k$, općenitiji razvoj u Fourierov red možemo zapisati sljedećom formulom

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

gdje je $c_{-k} = \frac{1}{2}(b_k + ia_k)$ i $c_k = \frac{1}{2}(b_k - ia_k)$. Nulti član, „DC komponenta”, u ovom je slučaju $c_0 = \bar{c}_0 = \frac{a_0}{2}$.

2.2 Određivanje Fourierovih koeficijenata c_k

U ovom poglavlju pokazat ćemo kako za danu periodičku funkciju $f(x)$ izračunati k -ti koeficijent c_k . Budući da je

$$f(x) = \dots + c_{k-1}e^{(k-1)xi} + c_k e^{kxi} + c_{k+1}e^{(k+1)xi} + \dots,$$

dijeleći ovu jednadžbu s e^{kxi} (koji je uvijek različit od nule) dobivamo

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{f(x)}{e^{kxi}} - (\dots + c_{k-1}e^{-xi} + c_{k+1}e^{xi} + \dots) \\ &= f(x)e^{-kxi} - \sum_{j=-\infty, j \neq k}^{\infty} c_j e^{(j-k)xi}, \end{aligned}$$

za $k \in \mathbb{Z}$. Sada iskoristimo činjenicu da je c_k konstanta, tako da integrirajući obje strane po varijabli x na $[-\pi, \pi]$ dobivamo

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} c_k dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-kxi} dx - \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=-\infty, j \neq k}^{\infty} c_j e^{(j-k)xi} dx, \\ c_k \pi - (-c_k \pi) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-kxi} dx - \sum_{j=-\infty, j \neq k}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} c_j e^{(j-k)xi} dx, \\ 2\pi c_k &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-kxi} dx - \sum_{j=-\infty, j \neq k}^{\infty} \frac{1}{(j-k)i} c_j (e^{(j-k)\pi i} - e^{-(j-k)\pi i}), \end{aligned}$$

za $k \in \mathbb{Z}$. Čini se da smo dobili još kompliciraniji izraz za c_k , ali ako primijetimo da je, po Eulerovoj formuli, te jer je $(j-k) \in \mathbb{Z}$,

$$e^{(j-k)\pi i} - e^{-(j-k)\pi i} = i \sin(j-k)\pi = 0,$$

vidimo da se cijela suma poništava. Dijelevši jednadžbu s 2π dobivamo formulu za k -ti koeficijent Fourierova reda:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-kxi} dx.$$

Slično se može pokazati da vrijedi i za općenitiji interval, odnosno period, $[-L/2, L/2]$, te da tada Fourierov red glasi

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{(2\pi ikx)/L}, \quad (3)$$

s pridruženim koeficijentima

$$c_k = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-(2\pi kxi)/L} dx, \quad (4)$$

gdje je $k \in \mathbb{Z}$. Primijetimo da koeficijent $\frac{2\pi}{L}$ služi da bismo sveli sinus i kosinus funkcije na interval $[0, L]$ s periodom L . Time je možemo promatrati i na $[-L/2, L/2]$ s periodom L .

2.3 Konvergencija Fourierovog reda

Ostaje nam samo pitanje konvergencije, koje je stoljećima predstavljalo poveći problem. Razlog tomu je alternirajuća priroda sinus i kosinus funkcije; tim svojstvom znatno je otežano promatranje konvergencije ovako definiranog reda. No, stvar otežava i promatranje Fourierove tvrdnje - da se ovako može razviti svaka, pa i nederivabilna funkcija! Rezultati promatranja ovog reda govore da je najvažniji uvjet zapravo integrabilnost funkcije koju razvijamo u Fourierov red. Što se tiče konvergencije, navest ćemo jedan važniji rezultat, a to je teorem koji govori o konvergenciji po L^2 normi:

Teorem 2.1 (Riesz-Fischer) *Funkcija $f \in L^2([-P/2, P/2])$ s periodom P je L^2 -integrabilna, tj. vrijedi*

$$\int_{-P/2}^{P/2} |f(x)|^2 dx < \infty,$$

ako i samo ako je Fourierov red te funkcije L^2 -konvergentan, tj. ako

$$\int_{-P/2}^{P/2} |f(x) - \sum_{k=-n}^n c_k e^{(2\pi i k x)/P}|^2 dx \rightarrow 0,$$

kada $n \rightarrow \infty$.

Dakle, kvadrat razlike funkcije $f(x)$ i njene konačne aproksimacije na nekom intervalu teži u nulu. Ovakve rezultate o konvergenciji Fourierova reda dobivamo ako se koristimo općenitijim, odnosno Lebesgueovim integralom. U analizi signala L^2 integral funkcije, odnosno signala, predstavlja energiju signala. Ako je taj integral konačan, kaže se da signal ima konačnu energiju. Ovo rješenje postignuto je tek 1907. godine, što je cijelo stoljeće od prvotnog utemeljenja Fourierove analize. Ovaj teorem usko je vezan s Parsevalovim teoremom, pa se nerijetko tako i naziva.

3 Fourierova transformacija

Promatrali smo kako razviti periodičnu funkciju perioda L definiranu na intervalu $[-L/2, L/2]$ u Fourierov red. No, ako pokušamo pustiti da L teži u beskonačnost, tada je funkcija periodična na intervalu $(-\infty, \infty)$ s beskonačno

velikim periodom (pretpostavljamo da je funkcija definirana svugdje). Ovakvim razmišljanjem čini se da možemo dobiti koeficijente i za funkciju koja je potpuno neperiodična te na taj način proširiti teoriju koja vrijedi za Fourierov red i na neperiodične funkcije. Međutim, ima li to smisla? Primijetimo da ako postavimo $L \rightarrow \infty$, ako integral ima konačnu vrijednost na $(-\infty, \infty)$, izraz (4) će otići u nulu (zbog $1/L$ ispred integrala). Stoga se čini da naivan pristup u kojemu želimo simulirati neperiodičnost s beskonačno dugim periodom ipak nema smisla, budući da će vrijednost koeficijenata težiti u nulu.

Međutim, ovakvo razmišljanje vodit će nas prema transformaciji izraza (4) za k -ti Fourierov koeficijent ka poznatoj formuli za Fourierovu transformaciju.

Kao prvi korak u toj transformaciji zapisat ćemo formulu (4) u obliku funkcije F ovisne o varijabli k/L na sljedeći način:

$$F\left(\frac{k}{L}\right) = \int_{-L/2}^{L/2} f(x)e^{-(2\pi kx)/L} dx. \quad (5)$$

Tada nova formula za Fourierov red glasi:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{L} F\left(\frac{k}{L}\right) e^{(2\pi ikx)/L}. \quad (6)$$

Sada pustimo da $L \rightarrow \infty$. Primijetimo da sada varijabla k/L , koja je bila diskretna, prelazi u kontinuiranu. Iako bismo prvo mislili da za fiksni k ovaj izraz prelazi u nulu, ideja je da je $-\infty < k < \infty$. Stoga se povećavanjem broja L zapravo samo smanjuje „razmak“ između vrijednosti koje varijabla prima. Drugim riječima, varijabla k/L prelazi iz diskretne u kontinuiranu varijablu s . Sada zapišemo (5) na novi način:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi sxi} dx.$$

Dobivena funkcija $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ naziva se Fourierovom transformacijom funkcije $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$; budući da izrazi za F i f sadržavaju kompleksne brojeve, i jedan i drugi daju kompleksne vrijednosti, a samim time i primaju. Promotrimo što se dogodi s formulom za Fourierov red. Budući da smo stavili

$L \rightarrow \infty$, možemo primijetiti da suma u (6) prelazi u integral; $1/L$ zapravo predstavlja beskonačno malu vrijednost ds :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{2\pi isx} ds.$$

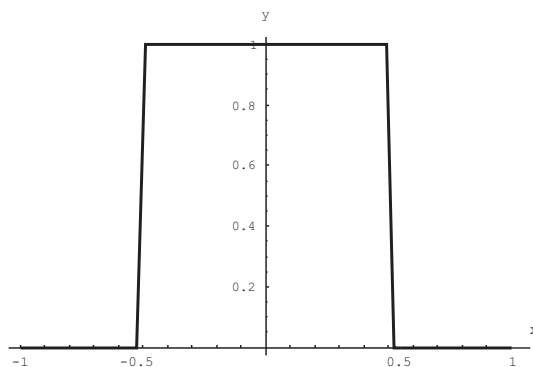
U ovom izrazu $f(x)$ predstavlja inverznu Fourierovu transformaciju - transformaciju koja temeljeno na koeficijentima $F(s)$ za svaki $s \in \mathbb{R}$ vraća originalnu funkciju.

Bitno je primijetiti da smo Fourierovu transformaciju dobili iz jednadžbe za koeficijente Fourierova reda, dok smo inverznu Fourierovu transformaciju dobili iz same jednadžbe Fourierova reda. U sljedećem primjeru pokazat ćemo Fourierovu transformaciju za *rectangle* funkciju.

Primjer 3.1 *Neka je zadana funkcija izrazom*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Ovakva se funkcija, kao što je prije napomenuto, često naziva rectangle funkcija (vidi sliku 3) i ima bitnu primjenu pri obradi signala. Nekada se definira i vrijednost od $\frac{1}{2}$ u točkama $\frac{1}{2}$ i $-\frac{1}{2}$, ali račun ostaje isti. Nađimo Fourierovu transformaciju ove funkcije.



Slika 3: Graf *rectangle* funkcije.

Rješenje 3.1 *Fourierova transformacija ove funkcije dobiva se preko već opisane formule:*

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi sx} dx.$$

Da bismo mogli izračunati ovaj integral za zadani $f(x)$, moramo ga rastaviti na tri dijela i uvrstiti odgovarajuće slučajeve za $f(x)$ na sljedeći način:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} 0 \cdot e^{-2\pi sxi} dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 \cdot e^{-2\pi sxi} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} 0 \cdot e^{-2\pi sxi} dx.$$

Iz gornjeg izraza vidimo da iščezavaju svi integrali osim srednjeg te je dovoljno pronaći:

$$F(s) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi sxi} dx.$$

Tada po Eulerovoj formuli slijedi:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\cos(-2\pi sx) + i \sin(-2\pi sx)) dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos(-2\pi sx) dx + i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin(-2\pi sx) dx \\ &= -\frac{1}{2\pi s} \left(\sin\left(-2\pi s \cdot \frac{1}{2}\right) - \sin\left(-2\pi s \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \right) \\ &\quad - \frac{i}{2\pi s} \left(\cos\left(-2\pi s \cdot \frac{1}{2}\right) - \cos\left(-2\pi s \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \right). \end{aligned}$$

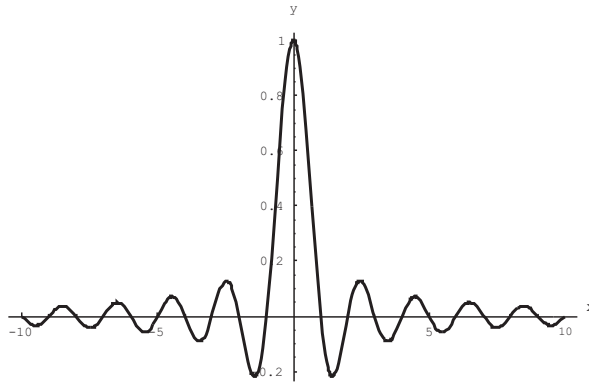
Koristeći se svojstvom parnosti funkcije kosinus i neparnosti funkcije sinus dobivamo

$$\begin{aligned}
F(s) &= -\frac{1}{2\pi s}(-\sin(\pi s) - \sin(\pi s)) - \frac{i}{2\pi s}(\cos(\pi s) - \cos(\pi s)) \\
&= -\frac{1}{2\pi s}(-2\sin(\pi s)) \\
&= \frac{\sin(\pi s)}{\pi s}.
\end{aligned}$$

Gornjim izrazom dana je Fourierova transformacija tražene funkcije.

Napomena. Funkcija dobivena Fourierovom transformacijom *rectangle* funkcije često se u analizi signala naziva *sinc* funkcija (vidi sliku 4) i definira na sljedeći način:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$



Slika 4: Graf *sinc* funkcije.

3.1 Diskretna Fourierova transformacija (DFT)

Ako imamo diskretan skup kompleksnih brojeva (koji smo mogli dobiti i uzorkovanjem funkcije na nekom intervalu), Fourierova transformacija koja je definirana za kontinuiran skup nam ne odgovara. Tada definiramo DFT na sljedeći način:

$$F_j = \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{\frac{2\pi i k j}{n}}, \quad (7)$$

koja niz f_0, \dots, f_{n-1} kompleksnih brojeva pretvara u niz F_0, \dots, F_{n-1} kompleksnih brojeva s pripadajućim inverzom

$$f_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} F_j e^{\frac{-2\pi i k j}{n}}, \quad (8)$$

koja kompleksne brojeve F_0, \dots, F_{n-1} pretvara u kompleksne brojeve f_0, \dots, f_{n-1} .

Primijetite da su u izrazima (7) i (8) diskretne vrijednosti u kojima evaluiramo funkciju $f(x)$, npr. x_0, \dots, x_{n-1} , te funkciju $F(s)$, npr. s_0, \dots, s_{n-1} , potpuno zamijenjene indeksima $k = 0, \dots, n-1$ i $j = 0, \dots, n-1$ na uzorku veličine n na način da definiramo $F(s_j) = F_j$ te $f(x_k) = f_k$. Nadalje, u eksponentu Eulerove konstante e umnožak dvaju odgovarajućih uzoraka $x_k s_j$ bit će jednak kj/n , budući da bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da uzorkujemo funkcije $f(x)$ s nekog intervala uzorkovanja oblika $[0, L]$ duljine L s uzorcima $x_k = k/B$, te $F[s]$ s nekog intervala uzorkovanja oblika $[0, B]$ duljine B s uzorcima $s_j = j/L$. Uzorci x_k i s_j uzimaju se tako da vrijedi

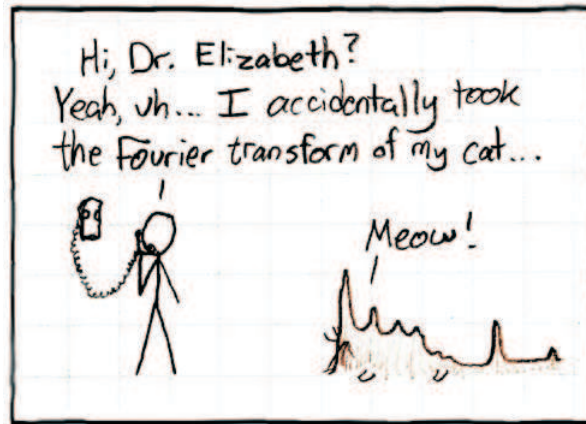
$$n \cdot \frac{1}{B} = L \text{ tj. } n \cdot \frac{1}{L} = B.$$

Budući da su ovako definirane dvije Fourierove transformacije inverz jedna drugoj, nije nam nužno strogo definirati jednu od tih transformacija izričito kao inverz. Stoga se u literaturi (kao i za općenitu Fourierovu transformaciju), uglavnom radi jednostavnosti, inverzi označavaju različito. Tako se (8) u analizi signala češće koristi kao DFT, a (7) kao inverz (uz promjenu predznaka u eksponentu od e). To ne predstavlja problem, jer se ionako svi računi obavljaju slično.

4 Zaključak i diskusija

Fourierov red, a posebice Fourierova transformacija u današnje su vrijeme jedan od najčešće korištenih matematičkih alata, a time i predmet brojnih šala na račun matematičara i inženjera (vidi sliku 5).

Značenje Fourierove transformacije je višestruko i ovisno o primjeni. Česta je primjena kada se funkcija - signal, koja je definirana na cijelom realnom pravcu, pretvara u funkciju koja za određenu frekvenciju k vraća $F(s)$, vrijednost iz koje možemo saznati informacije o amplitudi i fazi za frekvenciju s . Mnogo je operacija lakše obavljati preko Fourierove transformacije funkcije,



Slika 5: Slika preuzeta s <http://imgs.xkcd.com/comics/fourier.jpg>.

među njima je najbitnija konvolucija. Jednako tako, Fourierova transformacija ima puno svojstava koja olakšavaju analiziranje funkcije - signala (vidi [1], [5]).

Literatura

- [1] Brigham, E. Oran. *The fast Fourier transform and its applications*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall. ISBN 0-13-307505-2, 1988
- [2] Cormen, Thomas H.; Leiserson, Charles E. ; Rivest, Ronald L.; and Stein, Clifford. "Chapter 30: Polynomials and the FFT". *Introduction to Algorithms (Second ed.)*, MIT Press and McGraw-Hill. pp. 822-848 ISBN 0-262-03293-7, 2001
- [3] Oppenheim, Alan V.; Schaffer, R. W.; and Buck, J. R., *Discrete-time signal processing*, Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall. ISBN 0-13-754920-2, 1999
- [4] Osgood, Brad G. *The Fourier Transform and its Applications*, on-line lectures by Stanford School of Engineering, at <http://academicearth.org/courses/the-fourier-transform-and-its-applications>.

- [5] Poljak, Stjepan. *Brza Fourierova transformacija i primjene*, diplomski rad, Odjel za matematiku Sveučilište J.J. Strossmayer u Osijeku, Java implementacija: <http://www.mathos.hr/FFT/fourier.html>, 2010.
- [6] Tolstov, Georgi P. *Fourier Series*. Courier-Dover. ISBN 0486633179, 1976