Rješenje nagradnog zadatka iz 10. broja *math.e*

Goran Malić, PMF-Matematički odjel, 3. godina

Zadana je parabola kojoj je tjeme u ishodištu, dakle os parabole je os apscisa. Kako se polovište točaka T_0 i $T_0^{'}$ mora nalaziti na osi parabole, očito je da će te dvije točke imati jednake x-koordinate i suprotne y-koordinate, tj.

$$T_0 = (x_1, y_1), \quad T_0^{'} = (x_1, -y_1).$$

Točka T je na paraboli, pa možemo za njene koordinate uzeti

$$T = (x_2, y_2).$$

Izračunajmo sada koeficijent smjera pravca T_0T:

$$k_{T_0T} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Točke T i T_0 su na paraboli pa vrijedi

$$k_{T_0T} = \frac{y_2 - y_1}{\frac{y_2^2}{2p} - \frac{y_1^2}{2p}},$$

$$k_{T_0T} = 2p\frac{y_2 - y_1}{y_2^2 - y_1^2} = 2p\frac{y_2 - y_1}{(y_2 - y_1)(y_2 + y_1)} = \frac{2p}{y_1 + y_2}.$$

Točka $T_0^{'}$ i $T^{'}$ tvore okomicu na pravac T_0T pa vrijedi

$$k_{T_0T}k_{T_0^{'}T^{'}} = -1.$$

Tada je očito koeficijent smjera pravca $T_0^{'}T^{'}$ jednak

$$k_{T_0^{'}T^{'}} = -\frac{y_1 + y_2}{2p}.$$

Poznata nam je jedna točka tog pravca, tj. točka $T_0^{'} = (x_1, -y_1)$, pa je jednadžba pravca $T_0^{'}T^{'}$ dana s

$$y + y_1 = -\frac{y_1 + y_2}{2p}(x - x_1).$$

S obzirom na to da okomica iz točke $T_0^{'}$ na pravac T_0T siječe paralelu s osi parabole kroz točku T u točki $T^{'}$, možemo zaključiti da će točka $T^{'}$ imati istu y-koordinatu kao i točka T, tj.

$$T^{'} = (x_3, y_2).$$

Uvrstimo koordinate točke T' u jednadžbu pravca $T_0'T'$. Tada vrijedi

$$y_2 + y_1 = -\frac{y_1 + y_2}{2p}(x_3 - x_1),$$

iz čega kraćenjem s $y_1 + y_2$ i množenjem s $2p$ slijedi

$$x_3 = x_1 - 2p.$$

Tada su koordinate točke $T' = (x_1 - 2p, y_2)$.

Nadalje, x-koordinata točke T' je fiksna zato što su i parametar parabole i x-koordinata točke T_0 (odnosno T_0') fiksno određene vrijednosti, no y-koordinata točke T' je varijabilna, zato što je ona jednaka y-koordinati točke T koja se giba po paraboli.

Iz tih podataka možemo zaključiti da je geometrijsko mjesto točaka T' pravac paralelan s y-osi, preciznije pravac

$$x = x_1 - 2p.$$