

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODJEL

Ana Kuzle

Leonardov um

Seminarski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Aleksandra Čižmešija

Zagreb, 2006.

Sadržaj

0	Uvod	2
1	Matematika u Leonardovo vrijeme	3
1.1	Algebra	3
1.2	Geometrija	5
1.3	Aritmetika	6
1.4	Matematičke knjige u Leonardovo vrijeme	9
2	Matematičari Leonardovog vremena	10
3	Leonardo i matematika	11
3.1	Kodeksi	11
3.2	Lice genija	12
3.3	Matematika prije susreta s Lucom Pacioliem	13
3.4	Susret s Lucom Pacioliem	15
3.5	Matematika poslije susreta s Lucom Pacioliem	16
4	Zaključak	24

0 Uvod

Nebrojena učenja posvećena Leonardu da Vinci su pružila društvu legendarnu figuru znanstvenika i umjetnika. Ovaj članak je posvećen matematici i matematičarima Leonardovog vremena i interesima koje je genij da Vinci bio pokazao za ovu disciplinu, koja je tijekom 15. i 16.st. proživljavala važno razdoblje vlastite povijesti.

Opširno ćemo se posvetiti matematici tog vremena, s posebnom pozornošću na algebru, geometriju i aritmetiku, bez izostavljanja prostora rezerviranog za praktične demonstracije (jednadžbe, razvoj algebarskih simbola i upotreba različitih algoritama).

Matematika prisutna u Leonardovim *Kodeksima* razlikuje dva perioda: period prije i period poslije susreta s Lucom Pacioliem. Što se tiče posljednje faze, u njoj se bavi istraživanjem vezanim za konstrukcije ravnalom i šestarom, kvadraturu kruga i upotrebu metode „pogrešne pozicije”. Važno mjesto zaslužuju i poliedri realizirani na temelju Paciolijevog *Božanskog omjera* te poneka učenja vezana za popločavanja ravnine.

Kroz *Leonardov um* pokušat ćemo pružiti drugačiju perspektivu, pozivajući Vas da istražujete genijev način razmišljanja i njegovu jedinstvenu koncepciju znanja kroz trud asimilacije, preko jakih teorijskih sinteza i inventivnih eksperimenata, te kroz zakone koji vladaju između ljudi i prirode.

Ovakav pristup omogućuje drugačiju sliku, onakvu koja rješava misterij u koji je Leonardov mit često bio prekiven plaštom: um tvrdoglavo pokušava odgonetnuti racionalne procese koji pokreću fenomene fizičkog svijeta kao i tok misli, vođen željom postizanja idealne imitacije prirode u crtežima i slikama.

Neki smatraju da Leonardo nije imao ispravnu metodologiju u pristupu znanosti. No, imajmo na umu da je umro 45 g. prije rođenja Galilea Galileija te da je njegov svjež pristup obogatio kulturu i umjetnost svojega vremena.

1 Matematika u Leonardovo vrijeme

Algebra je, u Leonardovo vrijeme, smatrana uzvišenom matematikom, štoviše teškom. Bavit ćemo se geometrijom te aritmetikom, dakle, tehnikama računanja, koje nisu bile rezervirane samo za učenjake i matematičare, već su bile korisne trgovcima i obrtnicima.

1.1 Algebra

Jednadžbe

U 15.st. su se znale rješavati jednadžbe prvog i drugog stupnja, moderno izražene u kanonskoj formi na slijedeći način:

$$ax + b = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

makar se u tom periodu nisu izražavale u toj formi niti se tada poučavala takva simbolika. Na kraju 15.st.nije postojala prava i ispravna teorija (algebarskih) jednadžbi, koja će se razviti tek u prvoj polovici 16.st. rješavajući, također, i jednadžbe trećeg i četvrtog stupnja. Osobe koje su pritom bile važne u tim raspravama i napretku teorije jednadžbi i algebre, su:

- Scipione Dal Ferro (1465–1526)
- Nicolò Fontana da Brescia Tartaglia (1499–1557)
- Girolamo Cardano (1501–1576)
- Ludovico Ferrari (1522–1565)
- Rafael Bombelli (1526-1572)

Govoreći o kontroverziji kronološkog prioriteta metode rješavanja jednadžbi trećeg stupnja, često se osvrćemo na slavnu raspravu između između Cardana i njegova učenika Ferrarija, koju je vodio Tartaglia.

Međutim, prvi koji je pronašao tehniku za rješavanje tog tipa jednadžbi je bio, između 1500. i 1510.g., Scipione Dal Ferro, koji je umro bez da je objavio vlastito otkriće. No, predao ga je Antoniju Marii Fioriju i njegovom nasljedniku Annibalu Della Navi, od kojih potječu svjedočenja samog Cardana u njegovom djelu *Ars Magna*.

Budući da je Cardanova *Ars Magna* vidjela svijetlo dana 26 g. poslije Leonardovog otkrića, možemo zaključiti da je samo prvi dio takve složene teorije bila suvremena za vrijeme Leonardova života te da o tome nije znao ništa.

Algebarska notacija

Kao što smo već rekli algebarska notacija koja se upotrebljavala u drugoj polovici 15.st. nije bila jednaka onoj današnjoj. Notacija koju danas koristimo stvorena je par desetljeća poslije Leonardove smrti, zahvaljujući Françoisu Viètu (1540–1603) i Renéu Descartesu (1596–1650). Notacija je u 15.st. prolazila put od *verbalne algebre*, u kojoj su algebarski izrazi bili izraženi pomoću riječi, do *sinkopirane*, u kojoj su se pojedini termini— na primjer pojedine komponente jednadžbe— izražavali pomoću kratica.

Radi boljeg razumjevanja, navodim par primjera izraza *verbalne algebre* nasuprot današnjoj notaciji:

stvari jednake broju	$ax = b$
kvadrat i stvari jednake broju	$ax^2 + bx + c = 0$
kvadrat jednaki broju	$ax^2 = b$
kvadrat jednak stvarima	$ax^2 = bx$
kvadrat i broj jednak stvarima	$ax^2 + c = bx$
kvadrat jednak stvarima i broju	$ax^2 = bx + c$
kub i stvari jednake broju	$x^3 + bx = c$
kub jednak stvarima i broju	$x^3 = bx + c$
kub i broj jednak stvarima	$x^3 + c = bx$

Nasuprot tome, u *sinkopiranoj algebri*, koju je koristio i Luca Pacioli (1445–1514), dakle za vrijeme Leonardovog života (kasnije ćemo vidjeti da je Leonardovo prijateljstvo s njime imalo velik i bitan utjecaj), veličine i operacije su bile označene simbolima koju su bile pokrate za razne riječi. Čak je i Girolamo Cardano upotrebljavao ovakvu notaciju prikazanu ispod:

Qdratu aeqtur 4 rebus p:32

što bi danas bilo:

$$x^2 = 4x + 32$$

1.2 Geometrija

Geometrijska učenja u Leonardovo vrijeme su se bavila ravninskom i prostornom ravninom te novootkrivenom perspektivom.

Analitička geometrija, unatoč svim pokušajima Nicole d'Oresme, nije se još razvila i čekala je kreativnost samog Descartesa i Pierra de Fermata.

Nakon izuma štamparskog stroja Euklidovi *Elementi* su doživjeli svojevrstan „boom”. Spomenuta knjiga doživjela je toliko reprodukcija i prevoda da se može nositi u koštac s *Božanskom komedijom* čuvenog Dantea. No, čak ni Euklidova geometrija ne može biti zahvaćena samo ovim djelom. Drugo, veoma važno, djelo je *Ottica*, koju treba uzeti u obzir zbog svoje bitne povezanosti s perspektivom.

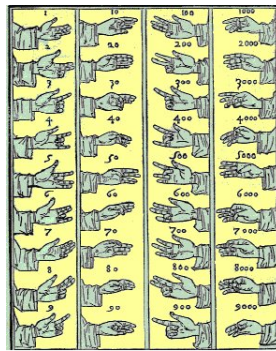
Do kraja 16.st. je perspektiva bila pretežito baština umjetnika, posebice slikara i arhitekata koji su, pritom, primjenjivali brojne koncepte i geometrijske tehnike u reprezentaciji treće dimenzije. Perspektiva se, u matematičkom smisli, u to doba još nije proučavala na apstraktnom nivou.



Slika 1: Euklidovi *Elementi*

1.3 Aritmetika

Aritmetika koja se pročavala u Leonardovo vrijeme je bila elementarna. Prva objavljena matematička knjiga je bila *Larte de labbacho*. Napisao ju je nepoznati autor, najvjerojatnije svećenik, koji ju je posvetio svojim najdražim prijateljima.



Slika 2: Tablica iz *Summe Luce* Paciolija

Knjiga se bavi evolucijom matematičkog znanja na zapadu: upotrebljava arapske brojke, ostavljajući upotrebu rimskih brojki iza sebe. Autor poučava 4 glavne aritmetičke operacije, potkrepljujući ih brojnim primjerima i različitim tehnikama notacije, od kojih su neke i dan danas u upotrebi. Upotrebljava koncept razlomaka, ali ne i decimalnih brojeva koji će, tek za kojih 100-ak godina, ugledati svijetlo dana.

Autor daje i brojne definicije osnovnih matematičkih pojmova i operacija. Među brojevima razlikuje 3 tipa brojeva: jednostavne, *articule* i složene. Jednostavan broj je bio onaj koji nije imao znamenku desetice, kao 1, 2, 3 itd.. *Articulo* broj je bio onaj koji se mogao podijeliti na 10 jednakih dijelova, kao 10, 20, 30 itd. Složen broj je bio onaj koji je bio veći od 10, ali se nije mogao podijeliti na 10 jednakih dijelova, kao 11, 12, 13 itd.

Znakovi za aritmetičke operacije, koji su danas prisutni, se još nisu upotrebljavali. Operacije su se stoga označavale na slijedeći način:

- zbrajanje sa „i”
- oduzimanje sa „od”
- množenje sa „fia”
- dijeljenje sa „u”

Za svaku operaciju autor navodi:

- definiciju (često se radi o opisu preko kojeg se usvajaju različiti termini)
- broj članova potrebnih za izvršavanje operacije
- određene uvjete potrebne za izvršavanje operacije
- praktično izvršavanje

Sva njegova saznanja dana su pregledno u slijedećoj tablici.

Operacija	Potrebni brojevi	Uvjeti
Zbrajanje	Potrebno je barem dvoje pribrojnika.	Preporuča se da je prvi pribrojnik veći od drugoga, te vrijedi svojstvo komutativnosti.
Oduzimanje	Potrebno je dvoje članova, umanjenik i umanjitelj.	Umanjenik ne smije biti manji od umanjenika.
Množenje	Potrebno je barem dvoje faktora.	Preporuča se da je prvi faktor veći od drugoga i prepoznaje se svojstvo komutativnosti.
Dijeljenje	Potrebno je troje članova: djeljenik, djelitelj i količnik.	Djeljenik ne smije biti manji od djelitelja.

U knjizi se navode i interesantni računski algoritmi za 4 operacije i selekcije problema, predstavljajući poneke algoritme koji se mogu upotrebljavati bez upotrebe abakusa i računa. U slijedećoj tablici navodim 5 različitih algoritama množenja dvaju brojeva. Ostali algoritmi mogu se pronaći u [1].

$ \begin{array}{r} 56789 \\ 1234 \\ \hline 227156 \\ 170367 \\ 113578 \\ 56789 \\ \hline \text{Suma } 70077626 \end{array} $	<p>Klasičan algoritam koji se i danas koristi.</p>
$ \begin{array}{r} 56789 \\ 227156/4 \\ 170367/3 \\ 113578/2 \\ 56789/1 \\ \hline \text{Suma } 70077626 \end{array} $	<p>Jednostavna varijanta prethodnog algoritma.</p>
$ \begin{array}{r} 56789 \\ 2271564 \\ 17036736 \\ 11357822 \\ 5678916 \\ \hline \text{Suma } 70077 \end{array} $	<p>Varijanta prethodnog. Pojedine rezultate množenja zapisujemo jedno ispod drugoga. Nakon toga zbrojimo uzduž sporedne dijagonale retka. Rezultat se čita uz krajeve počevši od horizontalnog.</p>
$ \begin{array}{r} \text{Suma} \\ \begin{array}{cccccc} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 6 & 4 \\ 7 & 7 & 6 & 2 & 6 & \\ \end{array} \end{array} $	<p>U svako polje mreže zapisuju se rezultati množenja znamenaka: $1 \times 9 = 09$, $2 \times 9 = 18$. Na kraju se zbraja duž dijagonala počevši od desna: 6, $7 + 3 + 2 = 12$, pišemo 2 i pamtimo 1, $8 + 2 + 4 + 3 + 8 + 1 = 26$, pišemo 6 i pamtimo 2, itd.</p>
$ \begin{array}{r} \begin{array}{cccccc} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\ 2 & 0 & 4 & 8 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 1 & 2 & 4 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 7 & 0 & 9 & 1 \\ \hline \text{Suma } 7 & 0 & 0 & 7 & & & \end{array} \end{array} $	<p>Jednostavna varijanta prethodnoga.</p>

1.4 Matematičke knjige u Leonardovo vrijeme

Prva objavljena matematička knjiga, što je već prije bilo napomenuto, je bila *Larte de labbacho*. Treba se podsjetiti da je štamparski stroj izumio Johann Gutenberg (1400?–1468) oko 1450.g., no mnoge knjige koje su napisane poslije 1455.g. cirkulirale su već dugo prije toga, a bile su napisane rukom ili prepisane mnogo puta.

Da li je te knjige mogao čitati i Leonardo? Kao što smo već rekli, najvažniji prevodi i komentari koji su tada postojali su bili oni od Euklida i Arhimeda na latinskom i grčkom jeziku. Njegovo je školsko obrazovanje oskudno; njegovo poznavanje latinske gramatike, povijesti i poezije jadno. *Omo senza lettere*, „čovjek bez obrazovanja”, zvao je sebe koketno—prazna ploča za program *da Vinci*. Stoga je, Leonardo učio po cijele stranice latinizama napamet kako bi mu poslužile u raspravama. Nasuprot tome, Leonardo je uvijek pokazivao veliki napor u savladavanju razlomaka, korjena, omjera, potencija u što ćemo se i uvjeriti nešto kasnije.



Slika 3: Gutenbergova Biblija

2 Matematičari Leonardovog vremena

Tko je, za nas, danas, matematičar? U dijelu *Umjetnost brojeva*, Jean Dieudonné, jedan od bitnijih matematičara 20.st., izjavljuje da je matematičar «onaj koji je objavio dokaz barem jednog netrivialnog teorema» (Dieudonné, 1989, p.7).

Očito ovu izjavu ne možemo smatrati ispravnom. Mnogi pojmovi u njoj bi trebali biti objašnjeni: jesmo li sigurni da znademo što je teorem ili što znači netrivialan? Nećemo se truditi odgovoriti na ovo već ćemo se ograničiti na očitu činjenicu da je definicija matematičara vezana za pojedino razdoblje.

Koga je Leonardo smatrao *matematičarem* lako je uočiti iz njegovih bilješki i ideja koje su cirkulirale u to vrijeme. *Matematičar* je bio onaj koji je, pri prihvaćanju novih dogmi i doktrina, tražio istinu nasuprot deduktivnom zaključivanju ili empirijskim dokazima. Dakle, matematičar je bila osoba koja bi se u drugim razdobljima nazivala skeptikom.

U mnogim prilikama, Leonardo je izjavljivao kako se susreo te izmijenio ideje s matematičarima. No, moglo se tada raditi i o znanstvenicima dugih područja, ili o doktorima, ... U svojem poznatom dijelu je izjavio: «O, matematičari, rasvijetlite takvu grubu pogresku!».

Ova njegova prirodna izjava u osuđivanju šarlatana i u verificiranju istine sa znanstvenim dokazima, su ga nosile kroz život u istraživanju fenomena, doktrina i različitih disciplina.

Razdoblje 15. i 16.st. bilo je bogato matematičarima koji su utjecali na Leonardov rad. No, za par njih se zna da je Leonardo imao priliku komunicirati, kojima se izgubio trag:

- Pietro Monti
- Giacomo Andrea da Ferrara
- dvojica braće medicinara Marliani
- Benedetto Aritmetico o dell'Abbaco

Najveći utjecaj na Leonardov rad imao je Luca Pacioli (1445—1514 ili 1517) koji je bio putujući poučavatelj matematike do 1497.g., kada je prihvatio poziv Ludovica Sforze da dođe raditi u Milano. Tamo je radio, živio i poučavao Leonarda matematiku. To je, ujedno, i period bogatih matematičkih postignuća našeg *genija*.

3 Leonardo i matematika

3.1 Kodeksi

Unatoč tome što se on nazivao „čovjekom bez obrazovanja”, Leonardo je stvorio kroz godine zavidnu knjižnicu, koja je obuhvaćala tekstove prirodne filozofije kao i one literarne, tehničke i umjetničke kulture. S autorima ovih tekstova Leonardo se uključio u dijalog koji nikako nije bio pasivan, podvrgavajući čak i priznate doktrine strogoj kontroli razloga i iskustvenim dokazima. Broj i raličitost knjiga u njegovoj knjižnici odražavaju znatiželju uma posežući za svim mogućim smjerovima istraživanja. Upotpunjen s knjižnicom, Leonardov radni stol je mjesto gdje su kreativni zadatci njegova uma postigli verbalni oblik upotpunjen skicama i crtežima, provedenim ručno ili uz pomoć sofisticiranih instrumenata.

Leonardo je sva svoja istraživanja zapisivao u *kodekse*. Radi se o 5000 stranica karakretističnog Leonardovog rukopisa, pisane s desna nalijevo u koje je zapisivao sve. Poslije smrti njegova odana učenika Francesca Melzija (1493–1570), taj materijal je doživio podjelu od strane kipara Pompea Leonija (1533–1608).

Danas su njegova najvažnija djela podjeljena na 10 svezaka:

- *CODICE ATLANTICO*
- *CODICE ARUNDEL*
- *CODICE WINSOR*
- *CODICE TRIVULZIANO*
- *CODICE ASHBURNHAM*
- *CODICI DI MADRID*
- *CODICI DELL'INSITUTO DI FRANCIA*
- *CODICI FORSTER*
- *CODICE LEICESTER*
- *CODICE SUL VOLO DEGLI UCCELLI*

S matematičkog gledišta nama će biti najzanimljiviji *Codice Atlantico*, *Codice Arundel*, *Codici di Madrid*, *Codici dell'Istituto di Francia* i *Codici Forster*.

3.2 Lice genija

Leonardo je najvjerojatnije najpoznatiji umjetnik svih vremena. I još uvijek njegova osobnost, njegove najdublje motivacije, njegov karakter pa čak i slika njegova lica se suprotstavljaju svim univerzalno prihvaćenim definicijama. Stoga ovo putovanje kroz Leonardov um treba započeti genijevim samo-portretom i njegovim licem u profilu u najranijoj reprezentaciji u slikarstvu. Spektakularna „rasprsnuta lubanja” na Weimarovom platnu izaziva jedan od ključnih Leonardovih koncepata umjetnosti i znanosti: spektakularan odnos između anatomske strukture, s jedne strane, i ekspresije duše, s druge strane.



Slika 4: Autoportret u crvenoj kredici, 1512-1515, Torino, Galleria Sabauda

Nadalje, sada ćemo se baviti dvama razdobljima u Leonardovom životu, onome prije i poslije susreta s Lucom Pacioliem. Vidjet ćemo i zašto.

3.3 Matematika prije susreta s Lucom Pacioliem

Razlomci i aritmetika

Na temelju Leonardovih bilješki vidimo da nije znao baratati s razlomcima. U svojem djelu *Codice Atlantico* Leonardo piše :

$$\ll (\dots) \text{ je } \frac{12}{12} \text{ što je } \frac{1}{0}. \gg$$

Bavio se i s mješovitim razlomcima koje je znao pretvoriti u obične razlomke, no nije ih znao zbrojiti, tj.:

$$1\frac{1}{12} + 1\frac{1}{6} + 1\frac{1}{2} = \frac{13}{12} + \frac{7}{6} + \frac{3}{2} = \frac{216}{78}.$$

Rezultat je očito kriv i trebao bi biti jednak $\frac{45}{12}$ što je jednako $\frac{15}{4}$. Iz svega ovoga zaključujemo da Leonardo nije prepoznao 12 kao nazivnik, te je čudno kako je uopće dobio broj 78.

Leonardo je trebao skratiti razlomak $\frac{270}{360}$. Kao što vidimo, svaki učenik bi to znao s imalo matematičke vještine skraćujući dani razlomak s 90. Leonardo je dobio ispravan razlomak $\frac{3}{4}$, no više zbog intuicije i analogije, nego zbog matematike.

Velikih problema je imao i sa dijeljenjem razlomaka jer nije prihvaćao zakone vezane za njih. Odnosno, nije mogao shvatiti kako dijeleći $\frac{2}{3}$ s $\frac{3}{4}$ može dobiti $\frac{8}{9}$ što je veće od $\frac{2}{3}$.

Njegovo shvaćanje je jednostavno objašnjivo: ako dijeleći A sa B dobivamo C, onda C mora biti manji od A. No, taj koncept vrijedi samo kod prirodnih, ali ne i kod racionalnih brojeva, tj. kod razlomaka.

Tada je Leonardo izmislio drugi način dijeljenja razlomaka koji, nažalost, isto nije bio korektan. Ono što je htio je multiplicirati $\frac{2}{2}$ sa samim sobom. Što je pritom dobio? Rezultat je bio začuđujući u najmanju ruku:

$$\frac{2}{2} \times \frac{2}{2} = \frac{4}{2} = 2,$$

iz čega je zaključio da je $\sqrt{2} = \frac{2}{2}$. Generalizirajući ovaj rezultat je tvrdio: $\sqrt{3} = \frac{3}{3}, \sqrt{4} = \frac{4}{4}, \dots$

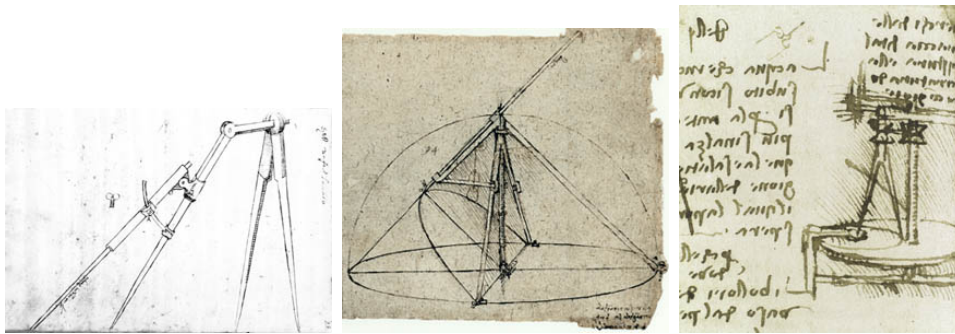
Iz svega navedenoga zaključujemo da je Leonardo imao teškoće u savladavanju operacija, omjera i osnovnih aritmetičkih tehnika.

Geometrija

Ono što je Leonardo znao o geometriji vidimo iz njegovih djela *Codici di Madrid*, koje se sastoji od dijelova A i B, i iz *Codici Forster*.

Velik interes je pokazao prema konstrukciji pravilnih poligona pomoću ravnala i šestara. Dijelio je opseg na 3, 4, 5, 6, 7, 8 i tako dalje na sukladne dijelove, do maksimalno 48 dijelova. Mnoge od tih konstrukcija su samo približne. Dao je i dvije konstrukcije pravilnog peterokuta. Rijetko je davao objašnjenja svojih konstrukcija makar su one proizlazile same od sebe. Suočio se i s problemom konstrukcije kvadrata ako mu on dat kao suma dva, dajući pritom samo približnu proceduru.

Također raspravlja i o nejednakosti trokuta, vrijednosti sume unutarnjih kutova te jednakosti vanjskog kuta trokuta i njemu nasuprotnih unutarnjih. Sve su to elementarna pitanja koje je genije savladavao u dobi od 44 godine.



Slika 5: Leonardove skice koje prikazuju konstrukciju elipse, parabole i cikloide

3.4 Susret s Lucom Paciolijem

Problem povezan s čitanjem na latinskom i grčkom je Leonardu još više odmogao u savladavanju tadašnje matematičke kulture. Međutim 1493.g. u Urbinu ili 1494.g. u Veneziji, napokon, izlazi enciklopedija Luce Paciolja, *Summa de aritmetica, geometria, proporzioni et proporzionalità*. Leonardo je odmah kupio tu knjigu i proučio ju. Tada ga je najviše fascinirala kvadratura kruga i teorija lunula. Susret Leonarda i Luce Paciolja dogodio se 1496.g. u Milanu kada je započelo njihovo „matematičko” prijateljstvo.



Slika 6: Luca Pacioli, Pinacoteca del Museo Capodimonte a Napoli

3.5 Matematika poslije susreta s Lucom Pacioliem

Zlatni rez

Već od antičkih vremena kipari i slikari su htijeli objasniti tajnu „lijepe estetike” uz pomoć matematike. Vitruvije je to vidio u proporciji dijelova uz pomoć aritmetike i geometrije. Leonardo je, upravo, proučavao proporcije ljudskoga tijela iz Vitruvijevog djela *O arhitekturi* koje se bazira na zlatnom rezu.

Vitruvijev čovjek je poznati Leonardov crtež upotpunjen bilješkama koji je nastao oko 1492.g. U njemu je zorno prikazan lik golog muškarca u dvije položene pozicije s razdvojenim rukama i nogama te istovremeno upisanim u krug i kvadrat. Crtež i tekst se ponekad zovu *Zakon proporcija* ili rjeđe *Proporcije čovjeka*.

Ova slika pruža savršen primjer Leonardovog interesa u problematiku proporcija. Pored toga, ova slika, također, prezentira temelj Leonardovih pokušaja u povezivanju čovjeka i prirode. To je bila znanstvena analiza koja je imala kozmološki značaj (korespondencija između čovjeka i svemira) i onih artističkih (pravilna reprezentacija ljudskog tijela i stvaranje arhitekture temeljene na proporcijama ljudskog tijela). Nekolicina vjeruje da Leonardo crtežom simbolizira materijalnu egzistenciju kvadratom, a duhovnu egzistenciju krugom.

Na temelju Leonardovih bilješki, zrcalno pisanim što je posljedica činjenice da je Leonardo imao disleksiju, napravljena je studija proporcija muškog tijela kao što je opisano u monografiji rimskog arhitekta Vitruvija, koji je detaljno opisao odnos dijelova ljudskog tijela:

- dlan je širine 4 prsta
- stopalo je širine 4 dlana
- lakat je širine 6 dlanova
- visina muškarca je 4 lakta (odnosno 24 dlana)
- korak je 4 lakta
- duljina raširenih muških ruku je jednaka njegovoj visini
- udaljenost od linije kose do brade je $1/10$ visine muškarca
- udaljenost od vrha galve do brade je $1/8$ visine muškarca
- maksimalna širina ramena je $1/4$ visine muškarca

- udaljenost od lakta do vrška ruke je $1/5$ visine muškarca
- udaljenost od lakta do pazušja je $1/8$ visine muškarca
- duljina ruke je $1/10$ visine muškarca
- udaljenost od brade do nosa je $1/3$ duljine glave
- udaljenost od linije kose do obrva je $1/3$ duljine lica
- duljina uha je $1/3$ duljine lica

Leonardo svojim crtežom očito ilustrira Vitruvijevo djelo *O arhitekturi* koje objašnjava:

„Pupak je prirodno smješten u centar ljudskog tijela, i ako muškarac leži licem okrenutim frontalno, a ruke i noge raširene, od pupka kao centar, upisan u krug, ono dodiruje njegove prste ruku i nogu. No, nije samo da je ljudsko tijelo opisano krugom, što se može vidjeti smještajući ga u kvadrat. Za mjerenje od stopala do vrha glave, a zatim preko raširenih ruku, vidimo da su te dvije duljine jednake; pa linije u pravim kutovima jedno od drugoga, okružujući tijelo, tvore kvadrat.”



Slika 7: Vitruvijeve čovjek, Gallerie dell'Accademia, Venice

Naravno ne postoji univerzalni skup proporcija ljudskog tijela. Antropologija je stvorena s ciljem opisivanja tih individualnih varijacija. Vitruvijeve mjerenja mogu biti interpretirana kao prosječne proporcije ili možda kao opis

idealne ljudske forme. Vitruvije prolazi kroz poteškoće u matematičkom preciziranju definicije u značenju pupka kao centra tijela, a različite definicije vode do drugačijih rezultata; naprimjer, centar ljudskog tijela ovisi o poziciji krajeva i u stajaćem stavu je najčešće 10 cm niže od pupka, blizu vrha kostiju bokova.

Primjetimo da Leonardov crtež kombinira Vitruvijeva saznanja s vlastitom opservacijom tadašnjeg ljudskog tijela. Pri crtanju ispravno primjećuje da kvadrat nema isti centar kao krug, pupak, ali je negdje niže u anatomiji ljudskog tijela. Ova prilagodba je inovativan dio Leonardovog crteža i ono što ga razlikuje od ranijih ilustracija. On se također razlikuje od Vitruvijevog crteža crtajući ruke podignute u poziciji u kojoj su vršci prstiju u razini s vrhom glave, dok su kod Vitruvijevog mnogo više, pri čemu ruke tvore linije koje prolaze kroz pupak.

Ovaj crtež sam po sebi se često upotrebljava kao simbol esencijalne simetrije ljudskog tijela i po ekstenziji, i svemira u cjelini.

Vitruvijev čovjek ostaje do dana današnjeg jedna od najspomenutijih i najreproduciranijih crteža u svijetu. Proporcije ljudskog tijela, kao što je predložio sam Vitruvije, je inspirirala brojne umjetnike u vlastitim verzijama prikaza *Vitruvijeva čovjeka*:

- Cesare Ceasariano (1521)
- Albrecht Dürer (1528)
- Pietro di Giacomo Cataneo (1554)
- Heinrich Lautensack (1618)
- William Blake (1795)

Jedna o njih je i na slijedećoj slici.

Mnogi geometrijski crteži i osvrti u različitim kodeksima imaju za temu zlatni rez. Međutim, često račun koji ide uz njih je bio neispravan. Za primjer ćemo uzeti problem iz *Codici dell'Instituto di Francia* u kojem se, kao što je već napomenuto bavio geometrijom. Leonardo je želio podijeliti segment duljine 12 u omjeru zlatnog reza koristeći se pritom propozicijom iz Euklidovih *Elementata*. Pronalazi mjere 4 i 8, aproksimirajući na pogrešan način; precizniji račun daje 4.5835921 i 7.4164079. Očito se radi o iracionalnim vrijedostima o kojima Leonardo nije mogao znati.



Slika 8: Vitruvijev čovjek na kovanici talijanskog 1 €

Konstrukcije „šestarom i ravnalom”

Druga Leonardova omiljena tema spada među „klasične probleme geometrije”. U strogo klasičnom smislu stari su Grci tretirali geometriju ravnalom i šestarom; ako je bio postavljen neki konstruktivni problem, njegovo se rješenje tražilo upotrebom samo ravnala i šestara. Zbog toga je došlo do problema pri duplikaciji kocke, kvadraturi kruga i trisekciji kuta. Tek u 19. st. matematičari su dokazali da se ti problemi ne mogu riješiti samo ravnalom i šestarom, ali ako se dozvoli upotreba nekih drugih pomagala problem postaje rješiv. Ta tri zadatka poznati su kao veliki matematički problemi.

Leonardo se u *Codice Atlantico* pozabavio problemom duplikacije kocke. Problem duplikacije kocke potekao je iz legende kada je jedno proročište postavilo zahtjev da se njegov oltar u obliku kocke zamijeni drugim dvostrukog obujma. To znači; ako prvotni oltar ima bridove duljine a , traženi oltar će imati bridove $b = \sqrt[3]{2} \cdot a$. Već iz ovoga možemo naslutiti da će sva Leonardova rješenja ovoga problema biti neprihvatljiva u matematičkom smislu. Zašto? Problem aproksimacije zaokupljao je većinu matematičara tog vremena. Od Pitagorina vremena se znalo da se racionalna vrijednost broja $\sqrt{2}$ ne može naći. Stoga su matematičari i arhitekti pokušavali naći racionalne brojeve koji će najbolje aproksimirati broj $\sqrt{2}$. Već spomenuti Leon Battista Alberti je predlagao da se broj $\sqrt{2}$ aproksimira sa $\frac{7}{5}$. S brojem $\sqrt[3]{2}$ problem je još veći jer on čak nije niti konstruktibilan ravnalom i šestarom, osim što je iracionalan.

No, vratimo se Leonardu. U već spomenutom kodeksu je dao „rješenje” problema duplikacije kocke; kocku duljine stranice 4 (dakle volumena 64) i kocku duljine stranice 5 (dakle volumena 125) ustvrđujući da je drugi volumen dvostruko veći od početnog volumena. Danas, uz pomoć kalkulatora znamo da je duljina stranice kocke volumena 128 približno jednaka 5.039. Greška Leonardovog rješenja i korektnog rezultata je minimalna. S mate-

matičkog gledišta, Leonardovo rješenje je neprihvatljivo, jer se u matematici ne rade povlastice prema aproksimaciji. S druge strane, s empirijskog gledišta, efektivno je rješenje razumno. Bez imalo sumnje, Leonardo je bio majstor aproksimacija kojima je posvetio mnogo pažnje.

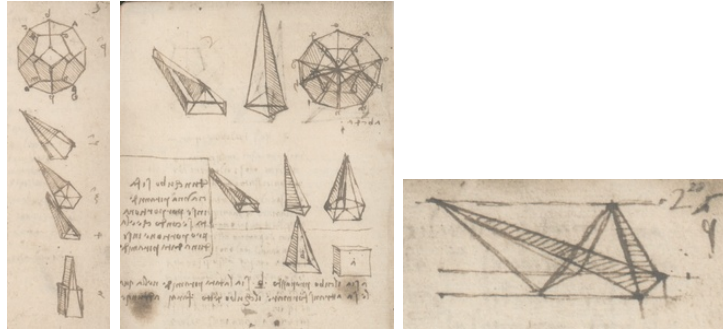
Jedna od najdužih strasti kojoj je Leonardo posvetio mnogo pažnje i stranica raznih kodeksa je pitanje kvadrature krivuljnih figura. Pod terminom kvadrature se smatra da se za zadanu figuru nađe kvadrat iste površine. Ukoliko se pritome radi o poligonalnim figurama problem je lako rješiv. Stvari se počinju komplicirati uvelike ukoliko se radi o krivuljnim figurama, što je već poznato iz problema „kvadrature kruga”. Često, iz Leonardovih riječi, možemo shvatiti da mu problem nije u potpunosti bio jasan. Poznata je 455 stranica *Codice Atlantica* koja sadrži oko 180 zadataka preoblikovanja figura unutar kojih upisuje kvadrat u krug dobivajući pritom kružne segmente, figure se mijenjaju kontinuirano, no pritom odnos između površine kvadrata i kružnih segmenata treba ostati konstantan. Više je pritom došla do izražaja njegova slikarska mašta negoli matematička kompetencija.



Slika 9: Leonardo da Vinci, Codice Atlantico

Mnogo pažnje posvetio je i pitanjima vezanim za volumen; podjela piramide na sukladne dijelove, transformacija dodekaedra u kocku jednakog volumena, transformacija piramide u drugu istoga volumena itd. Kako je izveo kvadraturu dodekaedra? Leonardo je, kako bi izračunao njegov volumen, podijelio poliedar na 12 piramida s peterokutnom bazom, od kojih je svaku nadalje podijelio na 5 piramida trokutaste baze. Svaka od dobivenih piramida je zatim transformirana u paralelopiped, čiji volumen pomnožen sa

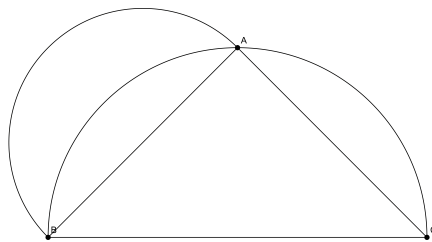
60, tvori drugi paralelopiped koji je transformiran u kocku istog volumena kao dodekaedar.



Slika 10: Leonardo da Vinci, Forster

Lunule

Ovakvim strukturama bavila se grčka geometrija u kojoj se ističe ime Hipokrat. Hipokrat iz Chia (-5.st.), možda Pitagorejac, bio je jedan od najpoznatijih matematičara tog stoljeća koji je napisao tekst *Elementi*. Bavio se kvadraturom lunula. Uzmimo kao primjer jednakokrčan trokut ABC s bazom BC i vrhom u A, upisanog u polukružnicu diametra BC. Ako konstruiramo izvan trokuta polukružnicu diametra AB, tada je lunula dio omeđen njome i prve nacrtane polukružnice. Hipokrat je pokazao da je površina te lunule jednaka polovici promatranog trokuta te je na taj način realizirao kvadraturu uz pomoć ravnala i šestara.



Slika 11: Lunula

Dakle, na temelju svih znanja koja je primio od Paciolija, Leonardo se napokon počeo baviti matematičkim problemima određene važnosti, pretvarajući poligone u dijelove kruga. Nije na odmet reći da je već Leon Battista Alberti, autor kojeg je Leonardo očito čitao, napisao djelo *O kvadraturi lunule*. Možda san o kvadraturi kruga, koji je pratio Leonarda tijekom života, upravo nalazi svoje začetke u tom djelu.

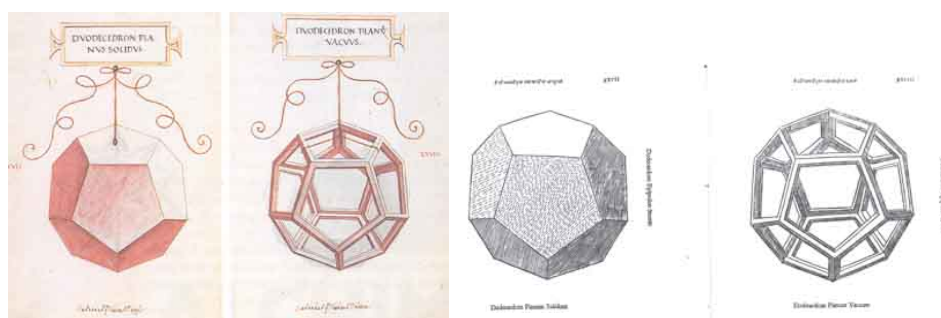
Taj problem vuče korjene iz antičkih vremena. Grci su ga znali rješavati na različite načine već od Platonova vremena. No, Grci su to htijeli napraviti samo uz pomoć ravnala i šestara. No, tek je 1882.g. C.L.F.Lindemann (1852–1939) pokazao da je to nemoguće. On je pokazao da je π transcendentan broj, a da se uz pomoć ravnala i šestara mogu konstruirati segmenti čija je duljina racionalan broj ili određeni neracionali algebarski brojevi.

Leonardo, oduševljen uspjehom lunula i zanesen snom Leona Battiste, se smatrao sposobnim u rješavanju problema kvadrature kruga. U mnogim prilikama je objavio da je rješio taj problem no, pritom, nigdje nije dao rješenje i konstrukciju. Očito je da se radilo o približnim rezultatima, dakle, nematematičkim.

Arhimed, čija djela su u to vrijeme bila prevedena i došla u Leonardove ruke, je bio izračunao aproksimativnu vrijednost broja π , zamišljajući da je konstruirao pravilne poligone s 96 strana, upisani i opisani danoj kružnici. Isto je napravio i Leonardo.

Poliedri za *Božanski omjer*

Leonardo je nacrtao brojne slike poliedara za rukom pisano izdanje *Božanski omjer* Luce Paciolija. Pacioli ju je potom darovao Giangaleazzu Sanseverinu i danas se čuva u ambroškoj biblioteci u Milanu.



Slika 12: Leonardovi i Paciolijevi dodekaedri

Popločavanja ravnine

Dolazimo do problema pri kojem se matematičari često pozivaju na Leonarda. Mnoge studije citiraju „Leonardove teoreme” vezane za popločavanje ravnine i simetrične grupe. Kako bi se to moglo objasniti na jednostavan način? Popločavanje možemo zamisliti kao pločice kojima želimo popločiti čitavi stan bez ikakvih rupa i preklapanja. Matematički preciznije, popločavanje ravnine je skup svih ravninskih figura u kojima nema preklapanja i rupa. Očito je da pravilni poligoni kao što je jednakostraničan trokut, kvadrat i pravilni šesterokut rješavaju taj problem budući da suma unutarnjih kutova u svakom vrhu iznosi 360° , odnosno jednaka je mjeri ispuženog kuta.

No, ovaj problem postaje mnogo zanimljivijim ukoliko se pravilne pločice zamijene drugim formama, poligonalnima ili ne.



Slika 13: Različiti primjeri popločavanja

Na brojnim stranicama unutar *Codice Atlantico* Leonardo crta različita popločavanja ravnina pločicama koje nisu bile pravilni poligoni. No, imajmo na umu da se ipak radi samo o crtežima uz koje su bili raznorazni komentari, grafički dokazi, no nikada neke teorijske rasprave.

4 Zaključak

Leonardo da Vinci (15. travnja 1452.– 2. svibnja 1519.) je bio talijanski slikar, arhitekt, izumitelj, glazbenik, kipar, pripovjedač, matematičar i inženjer.

Ukratko — najveći genij renesanse, čovjek koji utjelovljuje renesansni ideal svestrana čovjeka — višestruko nadarena čovjeka neutažive znatiželje i žudnje za novim spoznajama. Samo jednostavno nabrojanje njegovih neumjetničkih interesa graniči s neshvatljivim: anatomija, botanika, kartografija, geologija, matematika, aeronautika, optika, mehanika, astronomija, hidraulika, akustika, niskogradnja, tehnika proizvodnje oružja, planiranje gradova.

Njegova djela „Posljednja večera” (1495–1497) kao i „Mona Lisa” (1503–1506) spadaju među najpopularnije i najutjecajnije slike renesanse, dok njegovi spisi odražavaju duh znanstvenog istraživanja i mehaničke inventivnosti koja je bila stoljećima ispred svoga vremena.

Umjetnik po dispoziciji, otkrio je da su njegove oči bile njegov glavni put do znanja; za Leonarda, vid je bio čovjekov najviši organ čula zato jer vid sam pretvara činjenice u iskustva odmah, korektno, i sa sigurnošću. To znači da svaki fenomen koji je promatran postaje objekt znanja. Saper vedere („znati kako vidjeti”) postaje glavna tema njegovih proučavanja čovjekovih djela i kreacija prirode. Njegova kreativnost dosizala je u svako područje u kojem se koristilo grafičko predstavljanje: bio je slikar, kipar, arhitekt kao i inženjer. Ali on je išao i iznad svega toga. Njegov veličanstven intelekt, njegova neobičajena snaga opservacije, te njegovo majstorstvo umjetnosti crtanja vodilo ga je u promatranje same prirode, koju je proučavao s metodičnošću i ubacujući logiku — u čemu su njegova umjetnost i njegova znanost bile jednako zastupljene.

Leonardov učinak je sažetak toga izvanrednog perioda ljudske povijesti koji je poznat kao talijanska renesansa, perioda velikih kulturnih prednosti i velikih projekata. Leonardova djela su odraz čovjeka i žene toga doba, onoga što su osjećali i činili, strojeva koje su gradili kako bi zauzvrat mogli graditi crkve, palače, zámkove; strojeve za vođenje rata, za rad, za proizvodnju i trgovinu svih onih roba čija dostupnost je bila od vrlo velike važnosti za vladare i njihove dvoreve. No kako bilo, još važnije, Leonardovi izumi su svjedoci tko i što je on bio — čovjek koji je bio oblikovan najomiljenijim i najstimulativnijim gradom toga doba, Firencem, i tko je bio potican na osnovu svog vlastitog uzorka istraživanja i skiciranja ideja i planova i koncentriran na više različitih sektora, rangiranih od hidraulike do mehanike, do letenja, do anatomije i do optike. . . Trebamo samo pogledati neke od najinteresantnijih ideja od svih sadržanih u više od 6 000 Leonardovih zapisa kako bismo shvatili veličinu njegovih misli.

Leonardo je dospio u 21.stoljeće zahvaljujući svojoj modernosti, svojoj hrabrosti da se uputi i na nesigurna područja, pogotovo na području prirodnih znanosti, zahvaljujući neustrašivom pogledu u budućnost, neprestanom trudu da uvijek bude korak ispred svoga doba.

Literatura

- [1] Bagni, Giorgio T. i D'Amore, Bruno, *Leonardo e la Matematica*, Giunti, Milano, 2006.
- [2] http://it.wikipedia.org/wiki/Sezione_aurea
- [3] <http://en.wikipedia.org/wiki/Tesselation>
- [4] http://www.matematicamente.it/storia/divina_proporzione.htm
- [5] <http://mathworld.wolfram.com/Dodecahedron.html>
- [6] <http://www.calion.com/cultu/abbacho/abbacen.htm>
- [7] <http://www.universalleonardo.org/gallery.php?type=408>
- [8] <http://brunelleschi.imss.fi.it/menteleonardo/index.html>
- [9] <http://skole.htnet.hr/os-rijeka-002/matematika/problemi.htm>
- [10] <http://mathworld.wolfram.com/Tessellation.html>
- [11] <http://mathforum.org/sum95/suzanne/whattess.html>
- [12] <http://mathworld.wolfram.com/Lune.html>
- [13] *Geo* Leonardo da Vinci, Radin, Zagreb, Rujan 2006.