Hrvatski matematički elektronski časopis *math.e*

Broj 12

http://e.math.hr/

Afine transformacije ravnine

Harun Šiljak

Sadržaj:

1. Uvod

Većinu problema iz područja euklidske geometrije moguće je riješiti upotrebom tzv. sintetičkih metoda. Međutim, ponekad traženje tog "elementarnog" rješenja predstavlja teškoću i vrsnim poznavateljima geometrije, tako da su se stoljećima razvijale različite nesintetičke metode (analitička geometrija, kompleksni brojevi u geometriji, vektori), koje su olakšale rješavanje mnogih problema u ovom području. Afine transformacije nalaze se negdje između sintetičkih i nesintetičkih metoda: ne pretvaraju geometrijski problem u algebarski (kao što to čine analitičke metode), ali su neodvojivo povezane s vektorima, vektorskim prostorima i koordinatnim sustavima. U ovom tekstu pokušat ćemo sustavno iznijeti teoriju afinih transformacija u ravnini, prilagođenu srednjoškolskom nivou, te kroz niz ilustrativnih primjera pokazati njihovu primjenu pri rješavanju različitih geometrijskih problema.

> Transformaciju ravnine nazivamo **afinom** ako predstavlja neprekidnu bijekciju koja svaki pravac preslikava u pravac.

Spomenimo još i da se svaka afina transformacija ravnine može predstaviti u obliku

$$(x, y) \mapsto (ax + by + e, cx + dy + f)$$

za neke realne konstante a, b, c, d, e, f (zbog bijektivnosti potreban je i uvjet $ad - bc \neq 0$). Obično se transformacija prikazuje u formi matrice:

$$\begin{bmatrix} x' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$

Više o matričnim transformacijama ravnine možete saznati iz članka [BJ].

Sva izometrijska preslikavanja su afine transformacije. To je npr. očito za najpoznatije predstavnike izometrijskih preslikavanja: translaciju, rotaciju, osnu i centralnu simetriju. Sljedećih pet teorema predstavlja teorijske osnove afinih transformacija. Napomenimo još i to da su teoremi 2, 4 i 5 osnovno "oružje" u primjeni ove metode u planimetriji, što ćete u nastavku i vidjeti na primjerima.

Na ovome mjestu bilo bi korisno ponoviti osnovne činjenice o vektorskom prostoru V^2, tj. o vektorskoj ravnini. Njezini elementi su vektori - klase međusobno ekvivalentnih orijentiranih dužina. Orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ su *ekvivalentne* (tj. predstavljaju isti vektor) ako dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ imaju isto polovište.

Poznato je da iz svake točke ravnine možemo "nanijeti" bilo koji vektor. Vektore zbrajamo prema "pravilu trokuta": $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Za više informacija o vektorskoj algebri i teoriji vektorskih prostora, pogledajte [MM].

Afina transformacija ravnine L na prirodan način prenosi se i na vektore: $L(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{L(A)L(B)}$. Pokažimo najprije da je ova definicija dobra, tj. da ne ovisi o izboru predstavnika vektora.

Lema 1. Neka su A_1, B_1, C_1, D_1 slike točaka A, B, C, D, redom, preslikanih afinom transformacijom L. Ako je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, tada je $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{C_1D_1}$.

Dokaz. Neka je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. U slučaju da točke A, B, C i D nisu kolinearne, $ABCD$ je paralelogram. Kako se paralelni pravci preslikavaju u paralelne pravce (što ćemo dokazati u teoremu 2(c)), tako je i $A_1B_1C_1D_1$ također paralelogram, pa je $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{C_1D_1}$. Ako su točke A, B, C, D kolinearne, uzmimo točke E i F koje nisu kolinearne s njima tako da je $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$. Tada je $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{E_1F_1} = \overrightarrow{C_1D_1}$. □

Teorem 1. Ako je L afina transformacija, tada vrijedi

(a) $L(\vec{0}) = \vec{0}$,
(b) $L(\vec{a} + \vec{b}) = L(\vec{a}) + L(\vec{b})$ za proizvoljne vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$ iz V^2,
(c) $L(k\vec{a}) = kL(\vec{a})$ za proizvoljan vektor $\vec{a}$ i realan broj k.

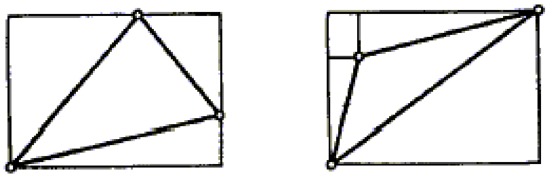
Dokaz. (a) $L(\vec{0}) = L(\overrightarrow{AA}) = \overrightarrow{L(A)L(A)} = \vec{0}$.
(b) Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Koristeći se definicijama zbrajanja vektora i djelovanja afine transformacije na vektore dobivamo $L(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = L(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{L(A)L(C)} = \overrightarrow{L(A)L(B)} + \overrightarrow{L(B)L(C)} = L(\overrightarrow{AB}) + L(\overrightarrow{BC})$.
(c) Uzmimo prvo da je k cijeli broj. Tada za prirodni k vrijedi $L(k\vec{a}) = L(\vec{a} + \ldots + \vec{a}) = L(\vec{a}) + \ldots + L(\vec{a}) = kL(\vec{a})$, a za negativni k dovoljno je u prethodnom izrazu iskoristiti $k\vec{a} = (-k)(-\vec{a})$. Sada, neka je $k = m/n$ racionalan broj; $nL(k\vec{a}) = L(nk\vec{a}) = L(m\vec{a}) = mL(\vec{a})$, pa je $L(k\vec{a}) = (m/n)L(\vec{a}) = kL(\vec{a})$. Konačno, ako je k iracionalan broj, postoji niz k_n racionalnih brojeva koji teže ka k (npr. niz decimalnih aproksimacija broja k). Budući da je L neprekidna funkcija, $L(k\vec{a}) = L(\lim_{n\to\infty} k_n\vec{a}) = \lim_{n\to\infty} k_nL(\vec{a}) = kL(\vec{a})$. □

Teorem 2. Afine transformacije čuvaju:

(a) kolinearnost točaka,
(b) konkurentnost pravaca,
(c) paralelnost pravaca,
(d) omjer dužina na pravcu,
(e) omjer površina poligona.

Dokaz. (a) Slijedi direktno iz činjenice da se afinom transformacijom pravac preslikava u pravac.
(b) Slijedi iz činjenice da se pravac preslikava u pravac i da je u pitanju bijekcija, jer se tada slika točke presjeka pravaca koji se preslikavaju nalazi u presjeku preslika svakog od tih pravaca.
(c) Analogno dokazu (b), iz činjenice preslikavanja pravca u pravac i bijektivnosti, slike pravaca koje se ne sijeku, također se ne sijeku.
(d) Neka je L afina transformacija i neka točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru $p : q$. Pokažimo da tada i C' dijeli dužinu $\overline{A'B'}$ u istom omjeru, pri čemu je $L(A) = A'$, $L(B) = B'$ i $L(C) = C'$. Zbog teorema 1, iz uvjeta $q\overrightarrow{AC} = p\overrightarrow{CB}$ slijedi $q\overrightarrow{A'C'} = qL(\overrightarrow{AC}) = L(q\overrightarrow{AC}) = L(p\overrightarrow{CB}) = pL(\overrightarrow{CB}) = p\overrightarrow{C'B'}$.
(e) Neka su a_1 i a_2 dva okomita pravca. Budući da afina transformacija čuva omjer duljina na paralelnim pravcima, duljine svih dužina paralelnih s jednim pravcem množe se istim koeficijentom. Označimo s k_1 i k_2 ove koeficijente za pravce a_1 i a_2 i neka je ψ kut između preslika ovih pravaca. Pokažimo da dana afina transformacija množi površine svih poligona s k, gdje je $k = k_1k_2 \sin\psi$. Za pravokutnike stranica paralelnih s a_1 i a_2 i za pravokutni trokut kateta paralelnih s a_1 i a_2 tvrdnja očito vrijedi. Bilo koji drugi trokut može

se dobiti isijecanjem nekoliko takvih pravokutnih trokuta iz pravokutnika stranica paralelnih s a_1 i a_2 (slika 1). Dakle, tvrdnja vrijedi za svaki trokut, pa samim time i za svaki poligon (jer je svaki poligon moguće nepresijecajućim dijagonalama podijeliti na trokute). □



Slika 1.

Na ovome mjestu valja primijetiti da afine transformacije općenito ne čuvaju udaljenost među točkama, niti kutove. To se jednostavno pokazuje na primjeru transformacije istezanja, definirane kao $(x, y) \to (cx, y)$ za realnu konstantu $c \neq 0$. Ovim ograničenjima umnogome su određeni i tipovi problema u kojima se učinkovito mogu primijeniti afine transformacije. Tako je zbog teorema 2 vidljivo da su ove transformacije iznimno korisne pri radu s omjerima, kako dužinskim, tako i površinskim (što će se vidjeti na primjerima), te s konkurentnim i paralelnim pravcima. S druge strane, zbog svojih ograničenja, afine transformacije iznimno su nepraktične u problemima u kojima se javljaju duljine dužina (bez omjera) i kutovi, pa samim time i normale, konciklične točke i slično.

Teorem 3. Neka su zadane dvije točke u ravnini, O i O', i dvije baze vektorskog prostora V^2, $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ i $\{\vec{e'_1}, \vec{e'_2}\}$. Tada postoji jedinstvena afina transformacija koja preslikava O u O' i $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ u $\{\vec{e'_1}, \vec{e'_2}\}$.

Dokaz. Definirajmo preslikavanje L na sljedeći način. Neka je X proizvoljna točka. Budući da je $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ baza vektorskog prostora, postoje jedinstveni brojevi x_1 i x_2 takvi da je $\overrightarrow{OX} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2}$. Pridružimo točki X točku $X' = L(X)$ takvu da je $\overrightarrow{O'X'} = x_1\vec{e'_1} + x_2\vec{e'_2}$. Budući da je $\{\vec{e'_1}, \vec{e'_2}\}$ također baza, konstruirano preslikavanje je bijekcija (inverzno preslikavanje da se konstruirati na sličan način), a pokazuje se i da je neprekidno. Dokažimo sada da je slika bilo kojeg pravca AB po preslikavanju L također pravac. Neka je $A' = L(A)$, $B' = L(B)$ i neka su (a_1, a_2) i (b_1, b_2) koordinate točaka A i B, redom, u bazi $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ (tj. $OA = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$, $\overrightarrow{OB} = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2}$). Uzmimo proizvoljnu točku C na pravcu AB. Budući da vrijedi $AC = k\overrightarrow{AB}$ za neki k, onda je $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} = ((1-k)a_1 + kb_1)\vec{e_1} + ((1-k)a_2 + kb_2)\vec{e_2}$. Prema definiciji preslikavanja L, za sliku $C' = L(C)$ vrijedi $\overrightarrow{O'C'} = ((1-k)a_1 + kb_1)\vec{e'_1} + ((1-k)a_2 + kb_2)\vec{e'_2} = (1-k)\overrightarrow{O'A'} + k\overrightarrow{O'B'} = \overrightarrow{O'A'} + k(\overrightarrow{O'B'} - \overrightarrow{O'A'}) = (1-k)\overrightarrow{O'A'} + k\overrightarrow{A'B'}$ pa točka C' leži na pravcu $A'B'$. Jedinstvenost preslikavanja L slijedi iz teorema 1. Zaista, $L(\overrightarrow{OX}) = x_1L(\vec{e_1}) + x_2L(\vec{e_2})$, dakle, slika točke X jednoznačno je određena slikama vektora $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$ i slikom točke O. □

Teorem 4. Za dana dva trokuta ABC i $A_1B_1C_1$ postoji jedinstvena afina transformacija koja jedan preslikava u drugi.

Dokaz. Dovoljno je u teoremu 3 uzeti $O = A$, $\vec{e_1} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e_2} = \overrightarrow{AC}$, $O' = A_1$, $e'_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$, $e_2 = \overrightarrow{A_1C_1}$. □

Iz teorema 4 i teorema 2(c) slijedi

Teorem 5. Za dana dva paralelograma postoji jedinstvena afina transformacija koja jedan preslikava u drugi.

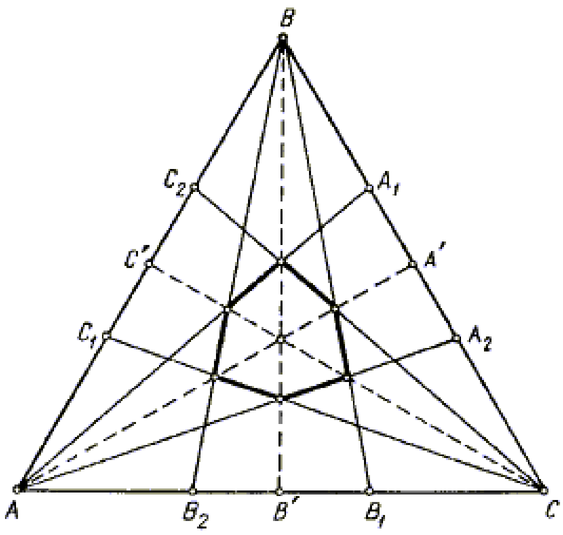
2. Primjeri riješenih zadataka

Zahvaljujući teoremima 4 i 5, često pri rješavanju problema u proizvoljnom trokutu možemo problem svesti na dokazivanje tvrdnje u jednakostraničnom trokutu, što je često mnogo lakše. Slično, paralelogram je moguće (po potrebi) transformirati u kvadrat. Ponekad je, pak, praktičnije trokut zamijeniti jednakokračnim trokutom, što ćemo vidjeti na nekim od primjera koji slijede. Naravno, pri svakoj od transformacija mora se paziti na zakonitosti iz teorema 2 i ograničenja vezana za kutove i dužine.

Na sljedećih nekoliko primjera vidjet ćemo iz prve ruke afine transformacije "na djelu". Bit će tu i relativno lakih i teških problema (tu je i jedan prijedlog za IMO). Zadaci su izabrani tako da pokažu standardnu metodu rješavanja planimetrijskih problema uz pomoć afinih transformacija i omoguće zainteresiranom čitatelju da riješi probleme za samostalan rad na kraju članka, te da lako prepozna mogućnost primjene afinih transformacija u problemima s kojima će se u budućnosti susretati (na natjecanjima, u nastavi ili istraživačkom radu).

Primjer 1. ([IJ]) Po dva pravca povučena su kroz svaki vrh trokuta tako da suprotnu stranicu dijele na tri jednaka dijela. Dokažite da se dijagonale koje spajaju suprotne vrhove šesterokuta nastalog u presjeku ovih pravaca sijeku u jednoj točki.

Rješenje. U zadatku su očito "u igri" samo omjeri na pravcima i konkurentnost, osobine koje afina transformacija čuva (prema teoremu 2). U skladu s teoremom 4, možemo dani trokut transformirati u jednakostranični i u njemu dokazati tvrdnju zadatka. Neka točke A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 dijele stranice jednakostraničnog trokuta ABC na jednake dijelove i neka su A', B', C' središta stranica (slika 2). Kako su pravci BB_1 i CC_2, te BB_2 i CC_1 simetrični u odnosu na pravac AA', a simetrični pravci sijeku se na osi simetrije, tako se jedna dijagonala promatranog šesterokuta nalazi na AA'. Slično, preostale dijagonale nalaze se na BB' i CC'. Jasno je, dalje, da se težišnice $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ sijeku u jednoj točki, čime je tvrdnja dokazana.



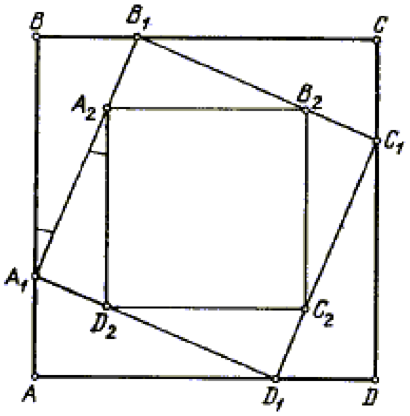
Slika 2.

Primjer 2. ([VP]) Na stranicama AB, BC, CD, DA paralelograma $ABCD$ izabrane su redom točke A_1, B_1, C_1, D_1, a na stranicama A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1 četverokuta $A_1B_1C_1D_1$ izabrane su redom točke A_2, B_2, C_2, D_2 tako da vrijedi

$$\frac{|AA_1|}{|BA_1|}=\frac{|BB_1|}{|CB_1|}=\frac{|CC_1|}{|DC_1|}=\frac{|DD_1|}{|AD_1|}=\frac{|A_1D_2|}{|D_1D_2|}=\frac{|D_1C_2|}{|C_1C_2|}=\frac{|C_1B_2|}{|B_1B_2|}=\frac{|B_1A_2|}{|A_1A_2|}.$$

Dokažite da je $A_2B_2C_2D_2$ paralelogram čije su stranice paralelne sa stranicama paralelograma $ABCD$.

Rješenje. Prema teoremu 5, svaki paralelogram može se afinom transformacijom transformirati u kvadrat. Dovoljno je trokut ABC transformirati u jednakokračni pravokutni trokut i paralelogram $ABCD$ postaje kvadrat. Budući da su osnovni elementi u problemu omjeri dužina na pravcu i paralelni pravci, ovdje možemo primijeniti afine transformacije i uzeti u daljnjem razmatranju da je $ABCD$ kvadrat.



Slika 3.

Razmotrimo rotaciju za kut od 90° oko središta kvadrata *ABCD* koji ga preslikava u samog sebe. Ovom rotacijom se i četverokuti $A_1B_1C_1D_1$ i $A_2B_2C_2D_2$ preslikavaju sami u sebe. Prema tome, i oni su kvadrati (pokažite to!) pa vrijedi $|AA_1| = |BB_1|$, $|B_1A_2| = |A_1D_2|$ i dovoljno je dokazati da je npr. $AB \parallel A_2D_2$. Imamo:

$$\mathrm{tg}\angle BA_1B_1 = \frac{|BB_1|}{|BA_1|} = \frac{|AA_1|}{|BA_1|} = \frac{|B_1A_2|}{|A_1A_2|} = \frac{|A_1D_2|}{|A_1A_2|} = \mathrm{tg}\angle A_1A_2D_2.$$

Iz toga slijedi $AB \parallel A_2D_2$, što smo i htjeli pokazati.

Primjer 3. ([VP]) U trapezu *ABCD* osnovica *AB* i *CD*, kroz točku *D* povučen je pravac paralelan s krakom *BC*, koji siječe dijagonalu *AC* u točki *P*. Pravac paralelan s krakom *AD*, povučen kroz točku *C*, siječe dijagonalu *BD* u točki *Q*. Dokažite da je pravac *PQ* paralelan s osnovicama trapeza *ABCD*.

Rješenje. Neka je *E* sjecište dijagonala trapeza. Afina transformacija koja trokut *ADE* preslikava u jednakokračni trokut preslikava trapez *ABCD* u jednakokračni trapez *A'B'C'D'*. Tada su točke *P'* i *Q'* simetrične u odnosu na simetralu dužine *A'B'*, pa je $P'Q' \parallel A'B'$.

Primjer 4. ([IJ]) Neka je točka *T* težište trokuta *ABC* i neka su *M*, *N*, *P* točke na stranicama *AB*, *BC*, *CA* trokuta, koje dijele ove stranice u istom omjeru ($|AM| : |MB| = |BN| : |NC| = |CP| : |PA| = p : q$). Dokažite:

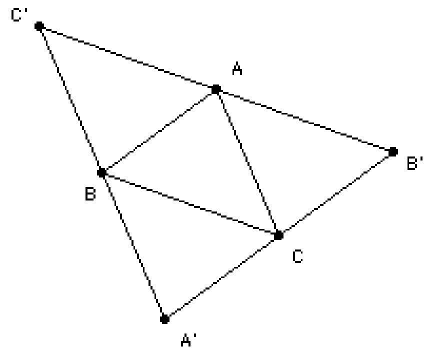
(a) *T* je težište trokuta *MNP*,

(b) *T* je težište trokuta čiji su vrhovi u presjeku pravaca *AN*, *BP* i *CM*.

Rješenje. (a) Afinom transformacijom preslikajmo trokut *ABC* u jednakostranični trokut *A'B'C'*. Neka su *T'*, *M'*, *N'*, *P'* slike točaka *T*, *M*, *N*, *P*. Rotacijom za kut od 120° oko točke *T'* trokut *M'N'P'* preslikava se u samog sebe. Prema tome, to je jednakostranični trokut, a *T'* mu je težište, odnosno sjecište težišnica. Budući da se afinom transformacijom težišnica preslikava u težišnicu, *T* je težište trokuta *MNP*.
(b) Na isti način zaključujemo da je *T* i težište trokuta nastalog u presjeku pravaca *AN*, *BP* i *CM*.

Primjer 5. ([JS]) Za svaki skup *S* od pet točaka u ravnini, od kojih tri nisu kolinearne s $M(S)$ i $m(S)$, označene su najveća i najmanja površina trokuta određenih točkama iz *S*. Koja je najmanja moguća vrijednost omjera $M(S)/m(S)$?

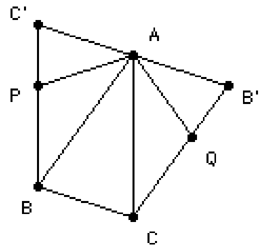
Rješenje. Dokažimo da je najmanji mogući omjer $(1+\sqrt{5})/2$ i da se on postiže ako se *S* sastoji od vrhova pravilnog peterokuta. Označimo s *A*, *B*, *C*, *D* i *E* točke skupa *S* i neka je $P(\Delta ABC) = M(S)$. Neka je $k = 2M(S)/(1+\sqrt{5})$. Sada trebamo pokazati da barem jedan od trokuta formiranih od točaka iz skupa *S* ima površinu manju ili jednaku *k*. Povucimo pravce *B'C'*, *C'A'* i *A'B'* kroz *A*, *B*, *C* paralelne s *BC*, *CA*, *AB* (slika 4).



Slika 4.

Točka D mora se nalaziti na istoj strani pravca $B'C'$ kao i BC, inače bi vrijedilo $P(\Delta BCD) > P(\Delta ABC)$, što se protivi činjenici da je $P(\Delta ABC)$ maksimalna. Slično, D se nalazi s iste strane $C'A'$ kao i CA, te s iste strane $A'B'$ kao i AB. Prema tome, D se nalazi ili unutar ΔABC, ili na jednoj od njegovih stranica. Slično zaključujemo i za točku E. Budući da su trokuti $A'BC$, $B'CA$, $C'BA$ disjunktni (izuzimajući točke A, B i C, u kojima se točke D i E ne mogu naći), u jednom od njih se ne nalaze ni D, ni E. Bez umanjenja općenitosti, uzmimo da se točke D i E nalaze u četverokutu $B'CBC'$.

Afine transformacije čuvaju omjer površina trokuta; zato možemo transformirati ΔABC u trokut kutova 36°, 72°, 72°, što će nam omogućiti da odaberemo točke P i Q, tako da je $APBCQ$ pravilan peterokut. Budući da je $AB \parallel CQ$ i $AB \parallel A'B'$, točka Q nalazi se na pravcu $B'C$. Analogno, P se nalazi na BC'.



Slika 5.

Sada razmotrimo dva slučaja, ovisno nalaze li se točke D i E unutar ili izvan peterokuta $APBCQ$.

1. Točka D nalazi se u peterokutu. Ako se nalazi u ΔABP, tada je $P(\Delta ABD) \leq P(\Delta ABP) = k$. Slično vrijedi i ako se D nalazi u ΔACQ. Ako se, pak, nalazi u ΔABC, tada je površina bar jednog od trokuta ΔABD, ΔBCD, ΔCAD manja ili jednaka od $P(\Delta ABC)/3 < k$. Slično zaključujemo i za točku E.

2. Točke D i E nalaze se u $\Delta APC'$ ili $\Delta AQB'$. Ako se obje nalaze u istom trokutu, tada je $P(\Delta ADE) \leq P(\Delta APC') < k$. Ako se nalaze u različitim trokutima, naprimjer D u $\Delta APC'$ i E u $\Delta AQB'$, tada je $P(\Delta ADE) = (|AD| \cdot |AE|/2) \sin\angle DAE \leq (|AP|^2/2) \sin\angle PAQ = P(\Delta PAQ) = k$.

Analizom navedenih primjera mogli ste vidjeti uobičajene ideje, metode i tehnike vezane za rad s afinim transformacijama, ali i primjere nestandardnih ideja koje zahtijevaju određenu dozu imaginacije i kreativnosti. Ideje iz ovih primjera pokušajte iskoristiti u zadacima za samostalan rad koji se nalaze na kraju teksta. Neki od njih daju se riješiti standardnim putem, no neki će zahtijevati nove ideje. Neka vas ne obeshrabri početni neuspjeh u nekima od zadataka. Pokušajte opet, gledajte, razmišljajte, analizirajte!

3. Zadaci za samostalan rad

Zadatak 1. ([VP]) Na stranicama AB, BC i CD paralelograma $ABCD$ izabrane su točke K, L i M, tako da dijele stranice u istom omjeru. Neka su b, c i d pravci koji prolaze točkama B, C i D i paralelne su s KL, KM, ML. Dokažite da se pravci b, c i d sijeku u jednoj točki.

Zadatak 2. ([VP]) Na stranicama AB, BC i AC trokuta ABC nalaze se točke M, N i P. Dokažite:

(a) Ako su točke M_1, N_1 i P_1 centralno simetrične točkama M, N i P u odnosu na središta odgovarajućih stranica, tada je $P(\Delta MNP) = P(\Delta M_1N_1P_1)$

(b) Ako se točke M_1, N_1 i P_1 nalaze na stranicama AC, BA i CB, tako da je $MM_1 \parallel BC$, $NN_1 \parallel CA$, $PP_1 \parallel AB$, tada je $P(\Delta MNP) = P(\Delta M_1N_1P_1)$.

Zadatak 3. ([KK]) Neka su X, Y, Z točke na stranicama BC, CA, AB, trokuta ABC za koje vrijedi $|BX| / |XC| = |CY| / |YA| = |AZ| / |ZB| = k$, za zadanu konstantu $k > 1$. Pronađite odnos površina trokuta čiji se vrhovi nalaze u presjeku dužine AX, BY i CZ i trokuta ABC (kao funkciju od k).

Zadatak 4. ([ML], Albanija 2004.) Odrediti omjer površine osmerokuta koji se nalazi u presjeku pravaca povučenih iz vrhova paralelograma do središta suprotnih stranica s površinom tog paralelograma.

Zadatak 5. ([MR], Švedska 1996.) Kroz točku u unutrašnjosti trokuta površine T povučeni su pravci paralelni sa stranicama trokuta, koji ga dijele na tri trokuta i tri paralelograma. Neka su T_1, T_2, T_3 površine dobivenih trokuta. Dokažite da je $\sqrt{T} = \sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} + \sqrt{T_3}$.

Zadatak 6. ([DJ], prijedlog za IMO 1995.) Neka je O točka u unutrašnjosti konveksnog četverokuta $ABCD$, čija je površina S i neka su K, L, M i N točke na stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$. Ako su $OKBL$ i $OMDN$ paralelogrami, dokažite da je $\sqrt{S} \geq \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$, gdje su S_1 i S_2 površine četverokuta $ONAK$ i $OLCM$.

Sljedeći zadatak naveden je pogrešno u [KK] i [MR]. Ovdje je dan ispravljen tekst.

Zadatak 7. Neka je $ABCDE$ konveksan peterokut i neka je $F = BC \cap DE$, $G = CD \cap EA$, $H = DE \cap AB$, $I = EA \cap BC$, $J = AB \cap DC$. Ako je $P(\Delta AHI) = P(\Delta BIJ) = P(\Delta CJF) = P(\Delta DFG) = P(\Delta EGH)$, dokažite da se pravci AF, BG, CH, DI, EJ sijeku u jednoj točki.

Literatura

[BJ] T. Bedeković, B. Jandras i D. Žubrinić, *Matrične transformacije ravnine*, Math.e **1** (2004). *http://e.math.hr/linal*

[DJ] D. Djukić, V. Janković, I. Matić i N. Petrović, *The IMO compendium*, Springer, 2006.

[IJ] I.M. Jaglom, *Geometričeskie preobrazovanija II*, Moskva, 1956.

[KK] K.S. Kedlaya, *Geometry unbound*, 2006. *http://www-math.mit.edu/~kedlaya/geometryunbound/*

[MM] D.S. Mitrinović, D. Mihailović i P.M. Vasić, *Linearna algebra – Polinomi – Analitička geometrija*, Beograd, 1973.

[ML] MathLinks Forum. *http://www.mathlinks.ro*

[VP] V.V. Prasolov, *Problems in plane geometry* (prijevod: D. Leites), 2005. *http://students.imsa.edu/~tliu/Math/planegeo.pdf*

[MR] M. Radovanović, *Afine transformacije*, 2007. *http://www.matf.bg.ac.yu/~matic/competitions/dodatne/afine_mr.pdf*

[JS] J. Scholes, *43rd IMO Shortlist*, 2002. *http://www.kalva.demon.co.uk/short/soln/sh02g5.html*