



---

## O Oberwolfach problemu

Dino Sejdinović i Alen Kopic

---

### 1. Uvod

U ovom radu razmatrat ćemo jedan otvoreni problem teorije grafova, takozvani Oberwolfach problem. Formalno, radi se o problemu faktorizacije grafa  $G$ , koji je potpun graf s neparnim brojem vrhova ili graf koji se dobije iz potpunog grafa s parnim brojem vrhova uklanjanjem nekog njegovog 1-faktora. Treba ispitati da li je moguće faktorizirati  $G$  na međusobno izomorfne 2-faktore zadanog oblika. Ovdje ćemo također razmatrati varijacije i poopćenja ovog problema, navesti do sada ostvarene rezultate i dati primjere faktorizacije malih grafova  $G$ .

U manje teorijskoj formulaciji klasični Oberwolfach problem zapravo predstavlja problem rasporeda sjedenja neparnog broja osoba  $n$  za određenim brojem okruglih stolova u  $(n-1)/2$  navrata, tako da svaka osoba pored svake od ostalih sjedi točno jednom. Na primjer, zamislite da organizirate znanstvenu konferenciju iz neke posve nove matematičke discipline, na kojoj sudjeluje 21 znanstvenik. Večere se održavaju u prostoriji u kojoj su tri okrugla stola s po sedam stolica svaki (drugu dvoranu zauzeli su fizičari). Ukupno će se održati deset konferencijskih večera. Kao organizatoru, glavni vam je cilj da se svaki od sudionika što bolje upozna sa svim ostalima. Nema bolje prilike za upoznavanje i razmjenu mišljenja od sjedenja jedan pored drugog tijekom večere! S obzirom da se održava deset večera, ispunjen je nuždan uvjet da svaka osoba sjedi točno jednom pored svake od ostalih. Svaku večer sjedit će pored dviju osoba (stolovi su okrugli!). Da li je uz te uvjete moguće napraviti odgovarajući raspored sjedenja? Što ako se broj sudionika promijeni? Što ako nisu svi stolovi iste veličine? Na primjer, vlasnik hotela odlučio je fizičarima prepustiti dvoranu s trima velikim stolovima, a večere matematičara smjestiti u prostoriju u kojoj se nalaze četiri okrugla stola s po četiri stolice i jedan okrugli stol s pet stolica. Postoji li tada dobar raspored? Što ako svaki sudionik dolazi sa svojim supružnikom, također matematičarom ili matematičarkom? Ne morate brinuti o međusobnom upoznavanju bračnih parova, ali i dalje trebate svaku osobu upoznati sa svim ostalima (izuzev njezinog bračnog druga). Odgovore na ova i slična

pitanja daje teorija Oberwolfach problema. U općenitoj formulaciji problem je otvoren i jako je malo rezultata koji govore o slučajima sa stolovima različite veličine. Također, algoritmi koji traže rješenja Oberwolfach problema dosta su ograničeni i uglavnom se svode na pretraživanje grubom silom ("brute force"). Do sada ne postoji opća metoda određivanja rasporeda sjedenja na konferencijskim večerama, već problem treba rješavati za svaku konferenciju posebno. Stoga bi od rješavanja ovog problema imala korist cjelokupna znanstvena zajednica, a naročito organizatori konferencija. Moglo bi se tada pristupiti rješavanju mnogo dubljeg i težeg problema, starog koliko i mi sami: što ćemo za večeru?

## 2. Porijeklo naziva

Oberwolfach problem prvi je formulirao Ringel 1967. godine [[GU](#)]. Problem je dobio ime po jednom od najprestižnijih matematičkih instituta u svijetu, *Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach*, smještenom u mjestu *Oberwolfach-Walke* na živopisnim obroncima gorja Schwarzwald u Njemačkoj. U više od pola stoljeća postojanja ovaj institut bio je mjesto održavanja oko 3000 raznih konferencija i seminara na kojima su sudjelovali matematičari iz cijelog svijeta, među njima i imena kakva su *A.M. Ostrowski*, *P. Erdős*, *J.-P. Serre*, *J.A.E. Dieudonné* i drugi. Na ovim konferencijama u pravilu vlada neformalna atmosfera, koju možda inspirira živopisni krajolik u kojem je institut smješten. Među ostalim neobičnim ritualima, kojima je cilj da se sudionici konferencija što bolje upoznaju (na primjer, u sobama za posjetioce nema televizora, radija, telefona ni brava), postoji i ritual slučajnog odabira rasporeda sjedenja na samim konferencijama, kao i pri zajedničkim objedima. Više o Oberwolfach institutu možete pročitati u članku [[JA](#)].



**Slika 1.** Matematički institut u Oberwolfachu

### 3. Osnovni pojmovi teorije grafova

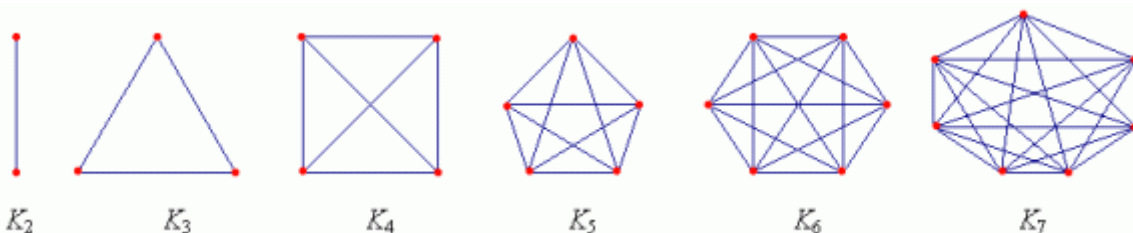
Oberwolfach problem zapravo je problem teorije grafova, matematičke discipline kojoj se nastanak veže za čuveni Eulerov problem [Königsberških mostova](#) i za [problem četiriju boja](#). Za čitatelje koji nisu upućeni u terminologiju teorije grafova dat ćemo sažetu listu definicija koje u daljnjem tekstu koristimo.

**Neusmjereni multigraf** (u daljem tekstu **multigraf**)  $G$  je uređeni par  $(V, E)$ , gdje:

1.  $V=V(G)$  predstavlja skup kojem elemente nazivamo **vrhovima** ili **čvorovima**.
2.  $E=E(G)$  predstavlja familiju neuređenih parova vrhova grafa  $G$ . Elemente familije  $E$  nazivamo **bridovima**.

Neka su  $u, v \in V$ ,  $u \neq v$ . Ako je  $e = \{u, v\} \in E$ , tada kažemo da su vrhovi  $u$  i  $v$  *susjedni* i da ih spaja brid  $e$ , odnosno da su  $u$  i  $v$  *krajevi* brida  $e$ . Ako  $E$  sadrži više od jednog primjerka neuređenog para  $\{u, v\}$ , tada potfamiliju svih neuređenih parova  $\{u, v\}$  nazivamo *višestrukim bridom*. Brid  $\{u, u\}$  naziva se *petljom* multigrafa  $G$ . Multigraf bez višestrukih bridova i bez petlji naziva se *jednostavnim grafom* (u daljnjem tekstu *graf*). U tom slučaju familija  $E$  je skup kojem su elementi dvočlani podskupovi od  $V$ . Ako za  $E$  uzmemo familiju uređenih parova vrhova grafa  $G$ , govorimo o *usmjerenom grafu* ili *digrafu*.

**Potpun graf**  $K_n$  je jednostavan graf s  $n$  vrhova, u kojem su svaka dva različita vrha susjedna. **Potpun multigraf**  $\lambda K_n$  je multigraf s  $n$  vrhova, u kojem svaki par vrhova spaja točno  $\lambda$  različitih bridova multigrafa, tj. višestruki brid veličine  $\lambda$ .



**Slika 2.** Primjeri potpunih grafova

Podgraf  $H$  grafa  $G$ , u oznaci  $H \subseteq G$ , je graf sa skupom vrhova  $V(H) \subseteq V(G)$  i familijom bridova  $E(H) \subseteq E(G)$ . Ako je  $E'$  podskup bridova grafa  $G$ , podgraf kojem skup vrhova čine krajevi svih bridova iz  $E'$  i kojem je skup bridova  $E'$  nazivamo *podgrafom induciranim skupom  $E'$*  i označavamo  $G[E']$ . Stupanj vrha  $v$  je broj  $d(v)$  vrhova koji su susjedni s  $v$ . Graf je *regularan* ako svi vrhovi imaju isti stupanj. Graf je *k-regularan* ako je  $d(v)=k$ , za svaki  $v \in V(G)$ .

Grafovi  $G_1$  i  $G_2$  su **izomorfni**, što se označava  $G_1 \cong G_2$ , ako postoji bijekcija  $f: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ , takva da je  $\{u, v\} \in E(G_1)$  ako i samo ako je  $\{f(u), f(v)\} \in E(G_2)$ . Preslikavanje  $f$  u tom slučaju nazivamo **izomorfizmom grafova  $G_1$  i  $G_2$** .

Staza je konačan neprazan niz  $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$  u kojem se alternativno izmjenjuju vrhovi i bridovi grafa  $G$ , pri čemu su vrhovi  $v_{i-1}$  i  $v_i$  krajevi brida  $e_i$ , za svako  $1 \leq i \leq k$ , i pritom su svi bridovi različiti. Put u grafu  $G$  je staza u kojoj su svi vrhovi različiti. Ako su u putu  $W$  početni vrh  $v_0$  i završni vrh  $v_k$  jednaki, takav se put zove *zatvorenim putem* ili *ciklusom*. Dva vrha  $u$  i  $v$  su *povezana* ako između njih postoji put u  $G$ . Lako se pokazuje da je povezanost relacija ekvivalencije na skupu vrhova  $V(G)$ . Klase ekvivalencije nazivamo *komponentama povezanosti* grafa  $G$ . Graf je *povezan* ako ima točno jednu komponentu povezanosti.

Neka je  $\{E_1, E_2, \dots, E_t\}$  particija familije  $E(G)$  bridova grafa  $G$  na disjunktne potfamilije. Ako je  $H_i = G[E_i]$ , tada kažemo da je  $\{H_1, H_2, \dots, H_t\}$  **dekompozicija** grafa  $G$  na podgrafove  $H_1, H_2, \dots, H_t$ .

## 4. Klasični Oberwolfach problem

Klasični (Ringelov) Oberwolfach problem glasi: "Neka na nekoj konferenciji imamo neparan broj sudionika  $n$ . Da li je moguće da tih  $n$  sudionika sjedi za  $s$  okruglih stolova  $T_1, T_2, \dots, T_s$ , gdje za stol  $T_i$  treba smjestiti  $t_i \geq 3$  osoba, pri čemu je  $\sum_i t_i = n$ , tako da u  $(n-1)/2$  navrata svaka osoba sjedi pored svake od ostalih točno jednom?". Uvest ćemo još jednu definiciju kako bismo problem mogli lakše formulirati na jeziku teorije grafova.

- Svaki razapinjući podgraf grafa  $G$ , tj. graf  $H$  sa skupom vrhova jednakim skupu vrhova od  $G$  i skupom bridova koji je podskup skupa bridova od  $G$  nazivamo **faktorom** grafa  $G$ .
- Faktor  $H$  grafa  $G$  koji je  $k$ -regularan nazivamo  **$k$ -faktorom** grafa  $G$ .
- Dekompozicija grafa  $G$  na  $k$ -faktore naziva se  **$k$ -faktorizacijom**.

Specijalno, 2-faktor grafa  $G$  je graf  $H = (V(G), F)$ , gdje je  $F \subseteq E(G)$  i svaki vrh iz  $G$  incidentan je s točno dva brida u  $F$ . Primijetimo da je svaka komponenta povezanosti proizvoljnog 2-faktora grafa  $G$  ciklus dužine  $d \geq 3$  u  $G$ , kao povezan 2-regularan graf.

Sada Oberwolfach problem možemo formulirati ovako: "**Neka je  $n$  neparan broj. Postoji li 2-faktorizacija potpunog grafa  $K_n$  u kojoj se svaki 2-faktor sastoji od ciklusa dužina  $t_1, t_2, \dots, t_s$ , gdje su  $t_1, t_2, \dots, t_s$  unaprijed zadani?**".

**Primjer 4.1.** Neka na konferenciji sudjeluje 7 znanstvenika koji na raspolaganju imaju prostoriju s dvama stolovima. Za jednim stolom su tri stolice, a za drugim četiri. Označimo znanstvenike brojevima od 1 do 7, a stolove s  $I$  i  $II$ . Potrebno je organizirati raspored sjedenja u 3 navrata tako da svaki znanstvenik sjedi pored svakog od ostalih točno jednom. Dakle, govorimo o klasičnom problemu s  $n = 7, s = 2, t_1 = 3$  i  $t_2 = 4$ .

Ovakav je raspored moguć i možemo ga opisati na sljedeći način. Smatramo da je dani raspored sjedenja ciklički, tj. prvi i posljednji znanstvenik sjede jedan kraj drugog.

	Stol I	Stol II
<b>Večera 1</b>	1, 2, 3	4, 5, 6, 7
<b>Večera 2</b>	1, 4, 6	2, 5, 3, 7
<b>Večera 3</b>	1, 5, 7	2, 6, 3, 4

## 5. Varijanta problema s parovima

Često se razmatra i sljedeća varijanta Oberwolfach problema, u kojoj imamo graf s parnim brojem vrhova. U radu iz 1979. godine formulirali su je Huang, Kotzig i Rosa [HK]: "Na konferenciji se nalazi  $m$  parova. Da li je moguće sastaviti raspored sjedenja za  $s$  okruglih stolova  $T_1, T_2, \dots, T_s$ , gdje za stol  $T_i$  treba smjestiti  $t_i \geq 3$  osoba, pri čemu je  $\sum_i t_i = 2m$ , tako da u  $m-1$  navrata svaka osoba sjedi do svake od ostalih osoba,

izuzev svog supružnika, točno jednom?". S obzirom na ograničenje da nijedna osoba ne sjedi kraj svojeg supružnika, jasno je da u ovom problemu nemamo potpun graf. Naime, iz potpunog grafa potrebno je ukloniti određeni broj bridova tako da svaki vrh bude incidentan s točno jednim od njih. Treba izvršiti sparivanje vrhova - naznačiti koji parovi vrhova predstavljaju supružnike. Drugim riječima, potrebno je ukloniti jedan 1-faktor potpunog grafa. To nam daje povod za sljedeću definiciju:

Ako je  $n$  paran broj, onda s  $K_n - I$  označavamo graf nastao iz potpunog grafa  $K_n$  uklanjanjem bridova jednog 1-faktora.

Graf  $K_n - I$  definiran je jednoznačno do izomorfizma. Primijetimo da, s obzirom da je 1-faktor pokrivaјуći graf u kojem su svaka dva brida nesusedna, on sadrži točno  $m = n/2$  bridova. Razapinjući 1-faktor naziva se još i *savršenim sparivanjem* grafa  $G$ . Sad Oberwolfach problem za paran broj osoba na jeziku teorije grafova glasi: "**Neka je  $n$  paran broj. Postoji li 2-faktorizacija grafa  $K_n - I$  u kojoj se svaki 2-faktor sastoji od ciklusa dužina  $t_1, t_2, \dots, t_s$ , gdje su  $t_1, t_2, \dots, t_s$  unaprijed zadani?**".

**Primjer 5.1.** Neka na konferenciji sudjeluju tri bračna para i neka na raspolaganju imaju prostoriju s jednim stolom za kojim je šest stolica. Treba napraviti raspored sjedenja u dva navrata tako da svatko sjedi točno jednom pored svakog drugog, izuzev svojeg supružnika. Dakle, radi se o varijanti Oberwolfach problema s parovima za  $n = 6, s = 1$  i  $t_1 = 6$ . Označimo znanstvenike s  $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ , pri čemu bračni par čine  $A_i$  i  $B_i$ ,  $i=1,2,3$ . Raspored je moguć i opisan je u sljedećoj tablici. Kao i u primjeru 4.1, prvu i posljednju osobu smatramo susjednim.

	Stol I
<b>Večera 1</b>	$A_1, A_2, A_3, B_1, B_3, B_2$
<b>Večera 2</b>	$A_1, A_3, B_2, B_1, A_2, B_3$

## 6. Opći slučaj

Sada razmotrimo opći slučaj. U najopćenitijem obliku, neorijentirani Oberwolfach problem je pitanje možemo li, ako su dani multigrafovi  $G, H_1, H_2, \dots, H_m$ , particionirati  $G$  na  $m$  faktora  $G_1, G_2, \dots, G_m$ , takvih da je  $G_i$  izomorfan s  $H_i$ , za  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Ovaj problem označavamo  $OP(G; H_1, H_2, \dots, H_m)$ . Ako su svi multigrafovi  $H_i$  izomorfni nekom multigrafu  $H$ , takav problem označavamo  $OP(G; H)$ . Za dane  $G$  i  $H$ , broj  $m$  takav da se  $G$

dekomponira na  $m$  faktora izomorfnih s  $H$ , ako postoji, jednoznačno je određen – dan je s  $|E(G)| / |E(H)|$ . Zato ga u oznaci nije potrebno navoditi. Ako su  $G$  i  $H$  jednostavni grafovi i ako su komponente povezanosti grafa  $H$  ciklusi, i to njih  $n_1$  duljine  $a_1$ ,  $n_2$  duljine  $a_2$ , ...,  $n_k$  duljine  $a_k$ , tada problem označavamo  $OP(G; a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, \dots, a_k^{n_k})$ . Ako je  $G = K_n$  za neparni  $n$  ili  $G = K_n - I$  za parni  $n$ , u oznaci se obično izostavlja  $G$ . Tada imamo klasični Oberwolfach problem, odnosno varijantu Huang–Kotzig–Rosa.

**Oblik** 2-faktora  $F$  je multiskup  $\{a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, \dots, a_k^{n_k}\}$ , gdje su  $a_i$  međusobno različite duljine ciklusa u  $F$ , a  $n_i$  broj ciklusa duljine  $a_i$ .

Sada Oberwolfach problem  $OP(a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, \dots, a_k^{n_k})$  glasi: mogu li se bridovi od  $K_n$  ili  $K_n - I$ , za  $n = \sum_i n_i a_i$ , podijeliti na izomorfne 2-faktore zadanog oblika?

## 7. Uniformni problem

Problem  $OP(a^m)$ , u kojem svi ciklusi imaju istu duljinu, zovemo *uniformnim* Oberwolfach problemom. Problem  $OP(a)$ , tj. uniformni problem za  $m=1$ , nije ništa drugo nego dekompozicija potpunog grafa  $K_n$  ili grafa  $K_n - I$  u Hamiltonove cikluse. U formulaciji problema kao rasporeda sjedenja na konferencijskim večerama uniformnost znači da svi stolovi imaju jednak broj stolica.

Rješenje uniformnog Oberwolfach problema daje sljedeći teorem, koji je rezultat Alspacha, Schellenberga, Stinsona i Wagnera [AS].

**Teorem 7.1.** Za  $n \geq 3$  problem  $OP(a^m)$  ima rješenje kad god je  $a \cdot m = n$ , osim što  $OP(3^2)$  i  $OP(3^4)$  nemaju rješenje.

Uvjet  $a \cdot m = n$  očito je nuždan za egzistenciju rješenja. Dakle, teorem tvrdi da rješenje uvijek postoji ako je zadovoljen nužni uvjet, osim u dvama navedenim slučajima.

Ilustrirajmo zašto  $OP(3^2)$  nema rješenje. Ako na prvom od sastanaka tri para osoba sjede za dva stola i za svakim od stolova su tri stolice, tada npr. osoba A sjedi do osoba B i C. Na idućem sastanku, nijedna od osoba B i C ne smije sjediti za istim stolom za kojim sjedi osoba A. No, to bi značilo da osobe B i C sjede za istim stolom pa sjede jedna pored druge! Dakle, na drugom sastanku sigurno bi se ponovio jedan par susjeda pa je traženi raspored sjedenja nemoguć. Slično bi se pokazalo i da  $OP(3^4)$  nema rješenje.

Teorem 7.1 može se proširiti na uniformni Oberwolfach problem za potpune

multigrafove, o čemu govori sljedeći teorem (Gvozdjak [[GV](#)]).

**Teorem 7.2.** Neka je  $\lambda \geq 1$  i  $G = \lambda K_n$  ako je  $n$  neparan ili  $\lambda$  paran, odnosno  $G = \lambda K_n - I$  ako je  $n$  paran i  $\lambda$  neparan. Neka su dalje  $a \geq 3$  i  $m \geq 1$  takvi da je  $a \cdot m = n$ . Tada  $OP(G; a^m)$  ima rješenje ako i samo ako nije ispunjen nijedan od sljedećih uvjeta:

1.  $\lambda \equiv 2 \pmod{4}$ ,  $a = 3$ ,  $m = 4$ ,
2.  $\lambda$  je neparan,  $a = 3$ ,  $m = 2$ ,
3.  $\lambda = 1$ ,  $a = 3$ ,  $m = 4$ .

Oberwolfach problem za potpun multigraf  $\lambda K_n$  tumačimo kao rasporede sjedenja na konferenciji s neparnim brojem sudionika  $n$ , na kojoj će svaki od sudionika u tijeku  $\lambda(n-1)/2$  sastanaka sjediti pored svakog drugog točno  $\lambda$  puta. Dakle, radi se o  $\lambda$ -tematskoj konferenciji.

## 8. Neki rezultati za neuniformni problem

Zahvaljujući navedenim teoremima, uniformni Oberwolfach problem u potpunosti je riješen. No, za općeniti, neuniformni problem rješenje je poznato samo u malom broju specijalnih slučajeva. U sljedećem teoremu navodimo neke do sada poznate rezultate.

**Teorem 8.1.** Sljedeći Oberwolfach problemi imaju rješenje:

1.  $OP(3, a)$  za sve neparne  $a \geq 5$ ,
2.  $OP(4, a)$  za sve parne  $a \geq 4$ ,
3.  $OP(a, a + 2)$  za sve  $a \geq 3$ ,
4.  $OP(a, a + 1)$  za sve  $a \geq 3$ ,  $a \neq 4$ ,
5.  $OP(3, 8a - 2)$  za sve  $a \geq 1$ ,
6.  $OP(3, (4a)^2)$  za sve  $a \geq 1$ ,
7.  $OP((2a + 1)^2, 2a + 2)$  za sve  $a \geq 1$ ,
8.  $OP(a^2, 2 \lceil a/2 \rceil + 2c)$  za sve  $a \geq 3$  i svaki  $c = 0, 2, 3, \dots$ ,
9.  $OP(2a + 1, 4^r)$  za sve  $a \geq 1$  i  $r \geq 1$ ,



10.  $OP(2a + 1, (4a)^r)$  za sve  $a \geq 1$  i  $r \geq 1$ ,

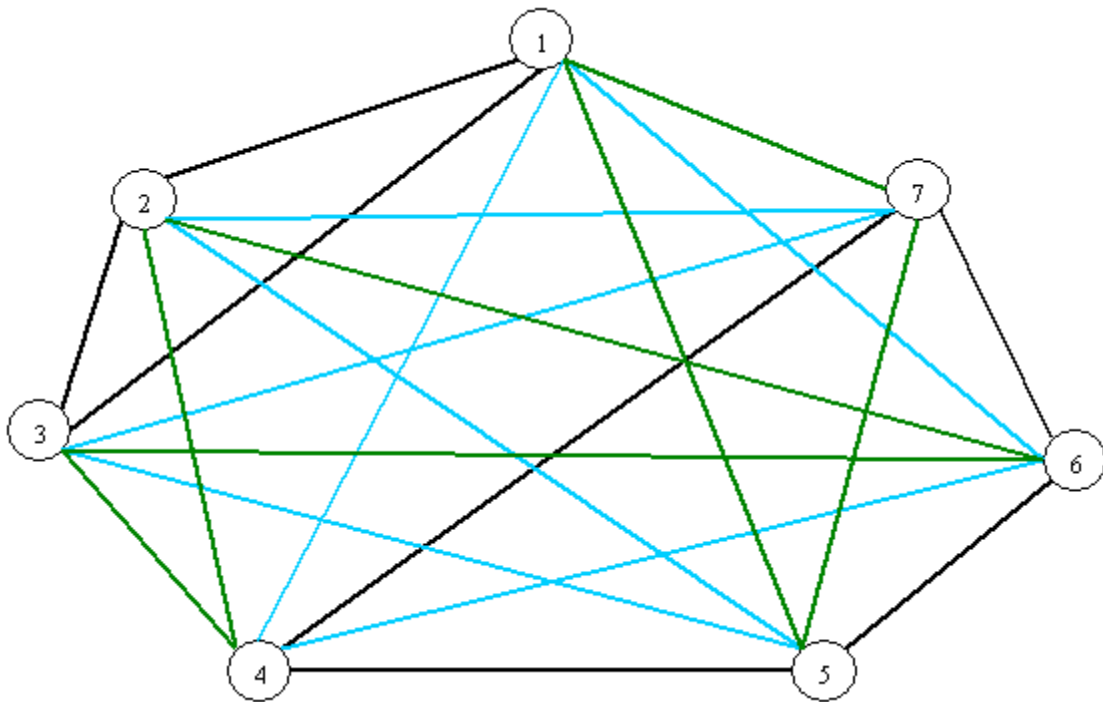
11.  $OP(a_1^r, a_2)$  za sve  $r \geq 1, a_1 \geq 3, a_2 \geq 4a_1r - 1$ .

Svi navedeni rezultati tiču se slučaja s dvjema različitim vrstama ciklusa, tj. problema oblika  $OP(a^n, b^m)$ . Dalje, osim u tvrdnjama 8 i 11, imamo ovisnost veličine ciklusa samo o jednom parametru, ili je jedna od veličina ciklusa konstanta.

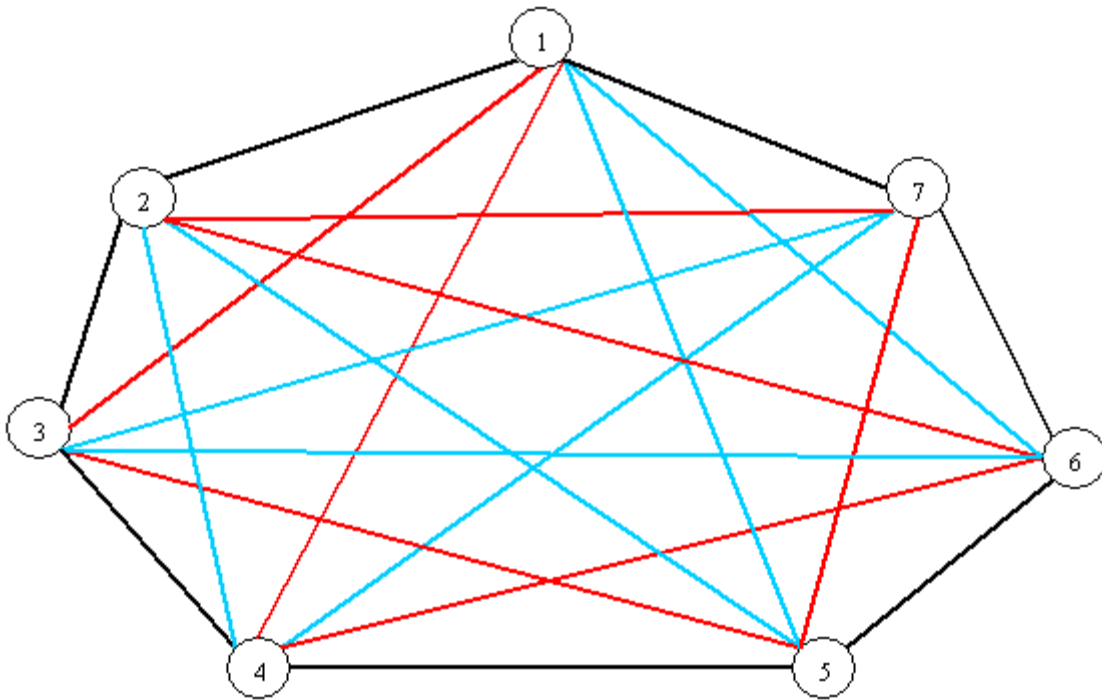
Najveće pomake u slučaju kad veličine ciklusa ovise o dvama parametrima dao je Gvozdjak [GV]. On je 2003. dokazao da  $OP(a, b)$  ima rješenje za sve različite neparne  $a$  i  $b$ . Jako je malo rezultata u slučaju triju različitih veličina ciklusa i gotovo se svi tiču problema  $OP(3, a, b)$ . Najprije je pokazano da  $OP(3, 4, a-7)$  i  $OP(3, 6, a-9)$  imaju rješenje za sve  $a$  koji nisu kongruentni 1 modulo 4, a zatim da  $OP(3, a, b)$  ima rješenje kad god je  $3 + a + b \equiv 0 \pmod{4}$ .

## 9. Dva jednostavna primjera

Sad ćemo detaljnije proučiti probleme iz primjera 4.1 i primjera 5.1. Primjer klasičnog Oberwolfach problema za graf  $K_7$ , odnosno problem konferencije sa 7 osoba, razmatrao je Colbourn 1982. godine [CO]. Graf  $K_7$  ima dvije različite vrste 2-faktora: faktor A oblika  $\{3, 4\}$  i faktor B oblika  $\{7\}$ . Postoje četiri moguća načina 2-faktorizacije grafa  $K_7$ : to su AAA, AAB, ABB i BBB. Faktorizacije AAB i ABB nas ovdje ne zanimaju jer u njima nisu svi 2-faktori izomorfni. S druge strane, AAA i BBB, ako postoje, redom su rješenja problema  $OP(3, 4)$  i  $OP(7)$ . Egzistenciju rješenja problema  $OP(3, 4)$  garantira tvrdnja 4 teorema 8.1, a  $OP(7)$  je uniformni problem za koji egzistenciju rješenja garantira teorem 7.1. Na narednim slikama predstavljeni su 2-faktori koji dekomponiraju  $K_7$  za probleme  $OP(3, 4)$  i  $OP(7)$ . Svaki od 2-faktora označen je posebnom bojom.



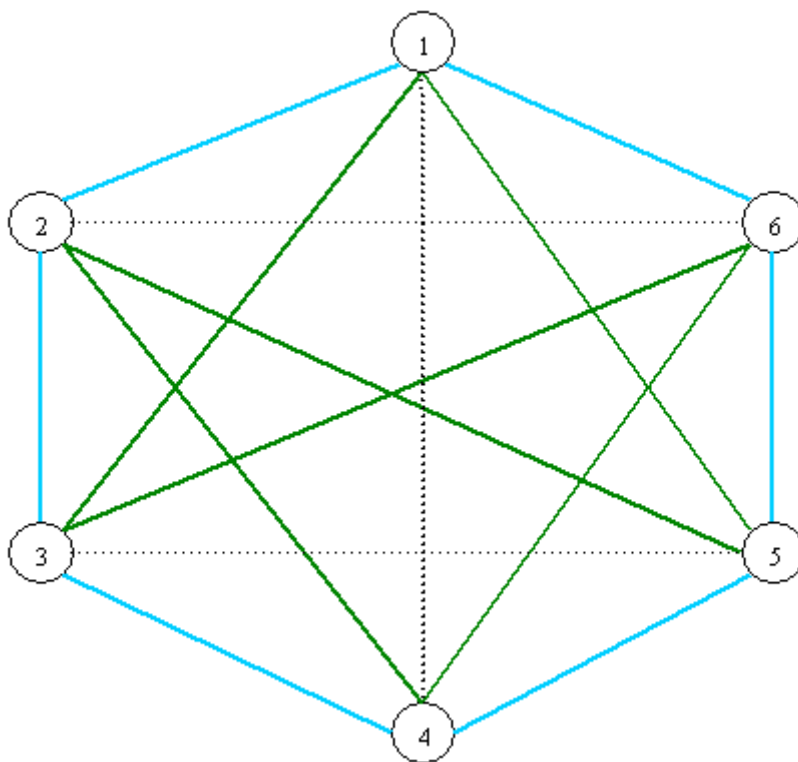
**Slika 3.** Faktorizacija grafa  $K_7$  na 2-faktore oblika  $\{3,4\}$



**Slika 4.** Faktorizacija grafa  $K_7$  na 2-faktore oblika  $\{7\}$

Za konferenciju na kojoj sudjeluje tri para znanstvenika promatramo graf  $K_6 - I$ , gdje je  $I$  jedan 1-faktor potpunog grafa  $K_6$ . Moguće su dvije vrste 2-faktora, oblika  $\{3^2\}$  i  $\{6\}$ .

Kao što smo prije vidjeli,  $OP(3^2)$  nema rješenja. Jedno rješenje uniformnog problema OP (6) vidimo na slici 5. Za razliku od ranije razmatranog rješenja, ovdje su znanstvenici označeni brojevima od 1 do 6, a 1-faktor koji se briše označen je isprekidanom linijom. To znači da su tri bračna para  $\{1,4\}$ ,  $\{2,6\}$  i  $\{3,5\}$ .



Slika 5. Faktorizacija grafa  $K_6 - I$  na 2-faktore oblika  $\{6\}$

## Literatura

[AS] B. Alspach, P.J. Schellenberg, D.R. Stinson, D. Wagner, *The Oberwolfach problem and factors of uniform odd length cycles*. Journal of Combinatorial Theory, Series A **52** (1989), 20-43.

[BE] C. Berge, *Graphes et hypergraphes*. Dunod, Paris, 1970.

[CO] C.J. Colbourn, *Hamiltonian decompositions of complete graphs*. Ars Combinatoria **14** (1982), 261-269.

[FR] F. Franek, A. Rosa, *Two-factorizations of small complete graphs*. Journal of Statistical Planning and Inference, **86** (2000), 435-442.

[[FS](#)] D. Froncek, B. Stevens, *Pancomponented 2-factorizations of complete graphs*. Discrete Mathematics **299** (2005), 99-112.

[[GU](#)] R.K. Guy, *Unsolved combinatorial problems*. Combinatorial Mathematics and its Applications (Proc. Conf., Oxford, 1969), str. 121-127. Academic Press, London, 1971.

[[GV](#)] P. Gvozdjak, *On the Oberwolfach problem for cycles with multiple lengths*. Disertacija, Simon Fraser University, 2003.

[[HK](#)] C. Huang, A. Kotzig, A. Rosa, *On a variation of the Oberwolfach problem*. Discrete Mathematics **27** (1979), 261-277.

[[JA](#)] A. Jackson, *Oberwolfach, yesterday and today*. Notices of the American Mathematical Society **47** (2000), 758-765.

[[LL](#)] J. Liu, D.R. Lick, *On  $\lambda$ -fold equipartite Oberwolfach problem with uniform table sizes*. Annals of Combinatorics **7** (2003), 315-323.